1er BAC Sciences Expérimentales BIOF
1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction série N°3 : *TD-PRODUIT SCALAIRE DANS $\mathcal{V}_2$*

Etude analytique -Applications : cercle

Exercice1 : Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère $\mathcal{R}\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ orthonormé.

Soient les points $A(3;4)$ $B(4;1)$; $C(2;-3)$.

1) Montrer que les points A ; B et C sont non alignés

2) Ecrire l'équation du cercle (C) passant par A ; B et C

Solution : 1) On a : $\overrightarrow{AB}(1;-3)$; $\overrightarrow{AC}(-1;-7)$ et $\det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -3 & -7\end{vmatrix}=-10\neq 0$

Donc les points A ; B et C sont non alignés

1)Soient $I\left(\frac{7}{2};\frac{5}{2}\right)$ et $J(3;-1)$ le milieu respectivement du segment : $[AB]$ et $[BC]$

Et soit (D) la médiatrice de $[AB]$ donc (D) passe par I et $\overrightarrow{AB}$ un vecteur normal a (D)

$M(x;y)\in(D)\Leftrightarrow \overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow\left(x-\frac{7}{2}\right)-3\left(y-\frac{5}{2}\right)=0\Leftrightarrow x-3y+4=0$

Donc : $(D): x-3y+4=0$

Et soit (Δ) la médiatrice de $[BC]$ donc (Δ) passe par J et $\overrightarrow{BC}$ un vecteur normal a (Δ)

$M(x;y)\in(\Delta)\Leftrightarrow \overrightarrow{JM}\cdot\overrightarrow{BC}=0\Leftrightarrow x+2y-1=0$

Donc : $(\Delta): x+2y-1=0$ (après simplifications)

Soit : Ω est le Centre du cercle circonscrit du triangle ABC donc c'est le point d'intersection de (Δ) et (D) on va donc résoudre le système : $\begin{cases}x-3y+4=0\\ x+2y-1=0\end{cases}$

La résolution de ce système donne : $\Omega(-1;1)$ donc $\Omega(-1;1)$ est le centre du cercle circonscrit du triangle ABC et le rayon est : $r=A\Omega=\sqrt{(3+1)^2+(4-1)^2}=5$

L'équation du cercle est : $(x+1)^2+(y-1)^2=25$

C'est-à-dire : $(C): x^2+y^2+2x-2y-23=0$.

Exercice2 : Déterminer l'ensemble (C) des points $M(x;y)$ du plan tel que :

$\begin{cases}x=3+\sqrt{3}\cos\theta\\ y=1+\sqrt{3}\sin\theta\end{cases}$ avec $(\theta\in\mathbb{R})$

Solution : $\begin{cases}x-3=\sqrt{3}\cos\theta\\ y-1=\sqrt{3}\sin\theta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3+\sqrt{3}\cos\theta\\ y=1+\sqrt{3}\sin\theta\end{cases}$

$(x-3)^2+(y-1)^2=\left(\sqrt{3}\cos\theta\right)^2+\left(\sqrt{3}\sin\theta\right)^2\Leftrightarrow(x-3)^2+(y-1)^2=3\left((\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2\right)\Leftrightarrow(x-3)^2+(y-1)^2=\sqrt{3}^2$

Donc l'ensemble (C) des points $M(x;y)$ du plan est *le cercle* (C) de centre $\Omega(3;1)$ et de rayon $R=\sqrt{3}$

Exercice3 : Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère $\mathcal{R}\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ orthonormé.

Soient les points $A(4;0)$ $B(4;4)$; $C(0;4)$.

Déterminer une équation du cercle inscrit dans le carré OABC

Solution : Il faut déterminer les coordonnées du centre du cercle : il se trouve au milieu du segment [OB].

Comme O(0;0) et B(4;4), le centre Ω a pour coordonnées (20+4;20+4) donc Ω(2;2).

Le cercle passe par le point de coordonnées (2;4) donc le rayon est :

$r=\sqrt{(2-2)^2+(2-4)^2}=2$

Le cercle a pour équation :

$(x-2)^2+(y-2)^2=4$

Exercice4 : Soit A (−2 ;1) et B (4 ; −2) deux points du plan muni d'un repère $\mathcal{R}\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ orthonormé.

On note (C) l'ensemble des points M $(x$; $y)$ du plan tels que : $x^2+y^2+2x-6y-15=0$

1)Déterminer l'ensemble des points M de (C)

2) Déterminer une équation de la droite (AB).

3) Déterminer les points d'intersection I et J de (AB) avec (C) .

4)Déterminer une équation de la tangente à (C) au point K(2;−1).

Solution : 1) $x^2+y^2+2x-6y-15=0\Leftrightarrow(x+1)^2-1+(y-3)^2-9-15=0\Leftrightarrow(x-(-1))^2(y-3)^2=25$

Le point M décrit donc le cercle de centre C(−1;3) et de rayon 5.

2) $\overrightarrow{AB}(6;-3)$ Ainsi une équation de la droite (AB) est de la forme $3x+6y+c=0$.

A(−2;1) vérifie donc cette équation. Ainsi −6+6+c=0 et c=0.

Une équation de (AB) est donc $3x+6y=0$ ou $y=-12x$.

3) Les coordonnées de I et J vérifient le système : $(S)\begin{cases}(1):(x+1)^2+(y-3)^2=25\\ (2):y=-\frac{1}{2}x\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}(x+1)^2+\left(-\frac{1}{2}x-3\right)^2=25\\ y=-\frac{1}{2}x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+2x+1+\frac{1}{4}x^2+3x+9=25\\ y=-\frac{1}{2}x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{5}{4}x^2+4x-15=0\\ y=-\frac{1}{2}x\end{cases}$

On détermine les solutions de $54x+5x$–15=0 : Δ=100. Les solutions sont donc : $x_1=2$ et $x_2=-6$

Ainsi Si $x_1=2$ alors $y=-1$ et si $x_2=-6$ alors : $y=3$.

On a donc I(−6;3) et J(2;−1).

4)Le vecteur $\overrightarrow{CK}$ est normal à la tangente à (C) en K.

Or $\overrightarrow{CK}(3;-4)$ Une équation de la tangente est alors de la forme $3x-4y+c=0$.

Or K appartient à cette droite donc :6+4+c=0 soit c=−10.

Une équation de la tangente à (C) en K est donc $3x-4y-10=0$.

Exercice5 : le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère $\mathcal{R}\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ orthonormé. (C_m) L'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tel que : $(C_m): x^2+y^2-2mx+2y+2m=0$ avec m Paramètre réel

1) Déterminer l'ensemble (C_1)

2) a) Montrer que $\forall m\in\mathbb{R}-\{1\}$ (C_m) est *un cercle* dont déterminera le centre Ω_m et de rayon R_m

2) b) Déterminer l'ensemble des centres Ω_m lorsque $m\in\mathbb{R}-\{1\}$

2) c) Montrer que tous les *cercles* (C_m) passent par un point fixe I dont déterminera et tracer $(C_0);(C_2);(C_3)$

3) a) Montrer que la droite (Δ) : $x=1$ est tangente a toutes les *cercles* (C_m)

3) b) Soit : $m\succ\frac{-3}{2}$ et $m\neq 1$ et le point $A(0;1)$; Vérifier que A est à l'extérieur des *cercles* (C_m) et que la droite (AI) n'est pas tangente aux Cercles (C_m) .

Solution :1) (C_1) ? Pour $m=1$ on a : $(C_1): x^2+y^2-2x+2y+2=0\Leftrightarrow(x-1)^2+(y+1)^2=0$

$\Leftrightarrow x-1=0$ *et* $y+1=0\Leftrightarrow x=1$ et $y=1$

Donc : (C_1) est le point $E(1;-1)$

2) a) $(C_m): x^2+y^2-2mx+2y+2m=0\Leftrightarrow(x-m)^2+(y+1)^2=(m-1)^2$

Donc : (C_m) est *un cercle* de centre $\Omega_m(m;-1)$ et de rayon $R_m=|m-1|$ $\forall m\in\mathbb{R}-\{1\}$

2) b) On pose : $x=m$ et $y=-1$ avec $m\in\mathbb{R}-\{1\}$

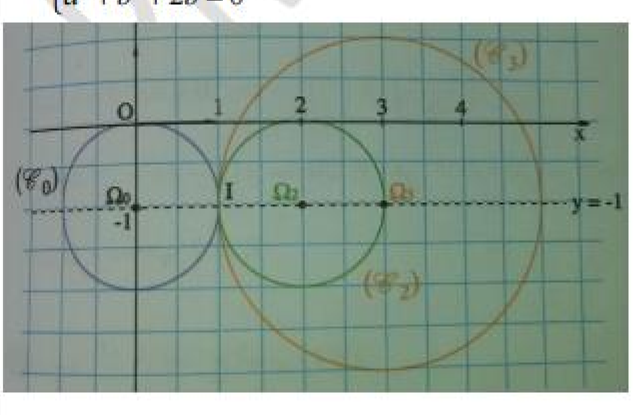
On a donc : l'ensemble des centres Ω_m lorsque $m\in\mathbb{R}-\{1\}$ est la droite d'équation : $y=-1$

Privé du point $E(1;-1)$

2) b) $I(a;b)\in(C_m)$ $\forall m\in\mathbb{R}-\{1\}$

$\Leftrightarrow a^2+b^2-2ma+2b+2m=0\Leftrightarrow m(2-2a)+a^2+b^2+2b=0$ $\forall m\in\mathbb{R}-\{1\}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}2-2a=0\\ a^2+b^2+2b=0\end{cases}\Leftrightarrow a=1$ et $b=-1$ Donc : tous les *cercles* (C_m) passent par un point fixe $I(1;-1)$



3) a) L'équation de (Δ) est : $x+0y-1=0$ et $d\left(\Omega_m,(\Delta)\right)=\frac{|m-1|}{\sqrt{1^2+0^2}}=|m-1|=R_m$

Donc : la droite (Δ) est tangente a toutes les *cercles* (C_m) (on peut montrer que (Δ) coupe en (C_m) un point unique)

3) b) On a : $x^2+y^2-2mx+2y+2m=2m+3$

Et puisque : $m\succ\frac{-3}{2}$ alors : $x^2+y^2-2mx+2y+2m\succ 0$ donc A est à l'extérieur des *cercles* (C_m)

Montrons que : $d\left(\Omega_m,(AI)\right)=\frac{|2m-2|}{\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}R_m$

Donc : (AI) n'est pas tangente aux *cercles* (C_m) car : $\frac{2}{\sqrt{5}}R_m\neq R_m$

Exercice6 : Dans un repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ on considère les points A(4;0), B(0;4) et C(−2;0).

1)Déterminer une équation du cercle (C) passant par les points A, B et C.

2) On considère le point D(2;4)

a) Montrer que D appartient à (C).

b) On désigne respectivement par E, F et G les projetés orthogonaux de D sur les droites (AB), (BC) et (AC).

Déterminer les coordonnées des points E, F et G.

c) Montrer que les points E, F et G sont alignés.

Solution : 1) Une équation de cercle est de la forme : $(1):(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ où le centre du cercle a pour coordonnées (a ; b) et le rayon est R.

Puisque chacun des points appartient au cercle, on obtient le système suivant :

$(S)\begin{cases}(1):(4-a)^2+(b)^2=R^2\\ (2):(a)^2+(4-b)^2=R^2\\ (3):(-2-a)^2+(b)^2=R^2\end{cases}$

En utilisant les équations (1) et (3) on obtient : $:(4-a)^2=(-2-a)^2\Leftrightarrow 16-8a+a^2=4+4a+a^2\Leftrightarrow a=1$

Notre système devient alors : $\begin{cases}(1):9+b^2=R^2\\ (2):1+(4-b)^2=R^2\\ (3):9+b^2=R^2\end{cases}$

En utilisant les équations (1) et (2) on obtient : $9+b^2=1+(4-b)^2\Leftrightarrow 9+b^2=1+16-8b+b^2\Leftrightarrow b=1$

On utilise cette valeur dans l'équation (3) et on trouve $R^2=10$

Une équation du cercle passant par les points A,B et C est donc : $(x-1)^2+(y-1)^2=10$

2)a) Regardons si les coordonnées de D vérifient l'équation de (C) :

$(2-1)^2+(4-1)^2=1+9=10$

Donc D appartient à (C) .

b)Le vecteur $\overrightarrow{AB}(-4;4)$ est un vecteur normal à la droite (DE).

Une équation de (DE) est de la forme : $-4x+4y+c=0$.

Or $D\in(DE)$ donc : $-8+16+c=0$ c'est-à-dire : $c=-8$

Une équation de (DE) est donc $-4x+4y-8=0$ ou encore $-x+y-2=0$

Une équation de (AB) est : $y=-x+4$

Les coordonnées du point E vérifient le système : $\begin{cases}y=-x+4\\ -x+y-2=0\\ (3):9+b^2=R^2\end{cases}$ On obtient ainsi : $E(1;3)$.

On procède de la même manière pour les points F et G et on trouve : $F\left(\frac{2}{5};\frac{24}{5}\right)$ et $G(2;0)$.

c) $\overrightarrow{EF}\left(-\frac{3}{5};\frac{9}{5}\right)$ et $\overrightarrow{EG}(1;-3)$

Par conséquent $\overrightarrow{EG}=-\frac{5}{3}\overrightarrow{EF}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien