1er BAC Sciences Expérimentales BIOF
1er BAC Sciences Mathématiques BIOF
Série N°9 : *BARYCENTRE*

(La correction voir😊 http://www.xriadiat.com)

Exercice01 : Dans le plan (P) rapporté à un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

Soient $A(-1;1)$ et $B(0;2)$ et $C(1;-1)$ et $D(1;0)$ et soit $G = Bar\ \{(A,1);(B,2)\}$

1) Déterminer les coordonnées de K = $Bar\ \{(A,2);(B,3)\}$

2) Déterminer les coordonnées de L le centre de gravité du triangle ABC

3) Déterminer les coordonnées de Barycentre des points $(A;2)$ et $(B;3)$ et $(C;1)$ et $(D;-1)$

Exercice02 : Soit $ABCD$ un quadrilatère

On appelle *I* le milieu de [*AC*], *J* le milieu de [*BD*] et *G* le point défini par : $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}\right)$

1) Montrer que *G* est le barycentre de (*A*, 2), (*B*, −1), (*C*, 2) et (*D*, −1).

2) En déduire que les points *I*, *J* et *G* sont alignés.

3) Montrer que les points A , K et O sont alignés.

Exercice03 : 1) Déterminer et construire le barycentre G des points pondérés (A ,1) ; (B, –3).

Comment sont les points A ; B et G ?

2) On donne dans le plan un triangle ABC rectangle en A tel que : AB = 8cm et AC = 4cm.

Construire le barycentre G des points (A,3) ; (B, –1) ; (C,2).

Exercice04 : Dans le plan P, soit un triangle ABC isocèle et rectangle en A tel que :

AB = AC = a ; ($a \in \mathbb{R}^{*+}$). Soit m un paramètre réel.

1°) Donnez une condition nécessaire et suffisante sur m pour que le système de points pondérés {(A, 2) ; (B, –1) ; (C, m)} admette un barycentre G_m.

2°) Pour m = 3 déterminer le barycentre G.

Exercice05 : Soit le parallélogramme ABCD.

1) Trouver le barycentre G des points pondérés (A,2) ; (B,–5) ; (C,3) ; (D,–1)

2) Trouver les coordonnées de G relativement au repère (A, B, D)

3) Construire G

Exercice06 : Soit *ABCD* un rectangle tel que *AB* = 3 et *BC* = 4.

1) Déterminez les coefficients α, β, γ tels que *D* soit le barycentre du système :

(A, α) ; (B ; β) et (C ; γ).

2) Déterminez l'ensemble des points *M* tels que $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=5$.

Exercice07 : *ABC* est un triangle.

1) Construire le barycentre *G* de (*A*, 1) ; (*B*, 2) et (*C*, 3) ; *M* étant un point quelconque du plan, exprimer $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right\|$ en fonction de *MG*.

2) Construire le barycentre *K* de (*A*, 8) ; (*B*, −1) et (*C*, −1) ; *M* étant un point quelconque du plan, exprimer $\left\|8\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|$ en fonction de *MK*.

3) Quel est l'ensemble des points *M* tels que $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|8\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|$? Le construire.

4) Exprimer plus simplement le vecteur $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}$. Soit Γ l'ensemble des points *M* tels que $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\right\|$.

Vérifier que *C* appartient à Γ. Déterminer et construire Γ.

Exercice08 : On se donne dans le plan un triangle *ABC* rectangle en *A*, tel que *AB* = 2*a* et *AC* = *a* où *a* est une longueur donnée.

1) Déterminer et construire l'ensemble E des points *M* du plan tels que

$$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|.$$

2) On désigne par *H* le point du plan tel que $\overrightarrow{AH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$.

a) Montrer que *H* est le barycentre des points *A*, *B* et *C* affectés de coefficients que l'on déterminera.

b) On considère l'ensemble des points du plan tels que $-3MA^2+MB^2+4MC^2=k$. Pour quelle valeur de *k* cet ensemble contient-il le point A ? Préciser l'ensemble alors obtenu et construisez le.

Exercice09 : Dans le plan P muni d'un repère (O, I, J) , on donne quatre points :

A(0 ;2) ; B(–5 ; 3) ; C(2 ; –1) ; D(–3 ; 4).

Trouver les coordonnées du barycentre G des points pondérés :(A, –1) ; (B,2) ; (C,3) ; (D,–6).

Exercice10 : Soient *A*, *B*, *C* et *D* les points de coordonnées respectives

(3 ; 3), (−1 ; −1), (−2 ; −3) et (3 ; −3).

1) Déterminer les coordonnées du point *E* tel que *BCDE* soit un parallélogramme.

2) Déterminer les coordonnées du barycentre *G* des points (*A*, 2), (*B*, 1), (*C* , 1), (*D*, 1) et (*E*, 1).

3) Soit *L* le centre du parallélogramme *BCDE*.

a) Démontrer que *A*, *G* et *L* sont alignés.

b) Démontrer que : $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GA}=\vec{0}$.

c) Que représente le point *G* pour le triangle *ABD* ? et pour le triangle *AEC* ?

4) a) Déterminer les coordonnées de *I* milieu de [*AB*] et *J* milieu de [*AE*].

b) Démontrer l'alignement de *I*, *G* et *D* et celui de *C*, *G* et *J*.

Exercice11 : Soit *ABC* un triangle, *I* le barycentre de (*B*, 1), (*C*, 2), *J* celui de (*A* , −3), (*C*, 2) et

K celui de (*B*, 1), (*A*, −3).

Démontrer que les droites (*AI*), (*BJ*) et (*CK*) sont parallèles.

Exercice12 : Soit *ABC* un triangle quelconque et *A'*, *B'* et *C'* les milieux respectifs de [*BC*], [*AC*] et [*AB*]. Soit *O* le centre du cercle circonscrit à ce triangle et *G* son centre de gravité.

Soit *H* le point défini par : $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

1) a) Démontrer que : $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OA'}$.

b) Démontrer alors que les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{OA'}$ sont colinéaires.

c) En déduire que (*AH*) est une hauteur du triangle *ABC* puis que *H* est l'orthocentre du triangle *ABC*.

2) a) Soit *M* un point quelconque du plan. Démontrer que : $3\overrightarrow{MG}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$.

b) Déduire des questions précédentes que les points *O*, *G* et *H* sont alignés. La droite formée par ces trois points est appelée *droite d'Euler*.

3)Soient *A''*, *B''* et *C''* les symétriques respectifs de *A*, *B* et *C* par rapport à *O*.

Soit *P* le milieu de [*HA''*].

a) Montrer que $\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{OA''}=2\overrightarrow{OA'}$ .En déduire que *P* = *A*.

b) Déterminer les symétriques de *H* par rapport à *A'*, *B'* et *C'*.

c) Montrer que ces points se trouvent sur le cercle circonscrit au triangle.

Exercice13 : *ABC* est un triangle équilatéral de côté *a*.

Soit E l'ensemble des points *M* du plan tels que $\left\|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}-4\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$.

1)Prouver que le point *B* appartient à E.

2) Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ est indépendant du choix de *M*.

3) Soit *G* le barycentre de (*A*, 1), (*B*, −4) et (*C*, 1). Prouver que *GM* = $a\frac{\sqrt{3}}{2}$ et en déduire la nature de E puis tracer E.

Exercice14 : *ABC* est un triangle équilatéral de côté 5 cm.

1)Construire *G* le barycentre de (*A*, 1), (*B*, −1) et (*C*, 1) et prouver que *ABCG* est un parallélogramme.

2) Déterminer l'ensemble des points *M* du plan tels que $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

3) Vérifier que le milieu de [*AC*] appartient à cet ensemble et le tracer.

Exercice15 : Soit *A* et *B* deux points distincts du plan.

1)Déterminer l'ensemble des points *M* du plan tels que ($\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$).($\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}$) = 0

- en développant le produit scalaire.
- en introduisant le milieu *I* de [*AB*].

2)Déterminer l'ensemble E des points *M* du plan tels que ($\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}$).($\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}$) = 0

On pourra introduire *I* le barycentre de (*A*, 1), (*B*, 2) et *J* le barycentre de (*A*, 1), (*B*, −2).

3) Démontrer que *M* : appartient à E si et seulement si *MA* = 2*MB*.

Exercice16 : Soit *ABCD* un rectangle.

1) Déterminer l'ensemble des points *M* du plan tels que $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}\right\|$.

Pour cela, on introduira *I* le milieu du segment [*AB*] et *K* le barycentre de (*C*, 3) et (*D*, −1).

2)Déterminer l'ensemble des points *M* du plan tels que $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|$.

Vérifier au préalable que *A* et *B* sont dans cet ensemble.

Exercice17 : *ABCD* est un carré de centre *O*, de côté *a*. *G* est le centre de gravité du triangle *ABC*.

1) Montrer que le barycentre *H* du système {(*A*, 1) ; (*B*, 1) ; (*C*, 1) ; (*D*, 5)} est le milieu du segment [*OD*].

2) Calculer, en fonction de *a*, la distance *OD*.

3) a) Déterminer et construire l'ensemble *E* des points *M* du plan vérifiant :

$$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+5\overrightarrow{MD}\right\|=2a\sqrt{2}.$$

b) Sans nouvelle démonstration, donner la position du barycentre *K* du système :

{(*A*, 1) ; (*B*, 5) ; (*C*, 1) ; (*D*, 1)}.

c) Déterminer et construire l'ensemble *F* des points M du plan vérifiant :

$$\left\|\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+5\overrightarrow{MD}\right\|.$$

4) a) Calculer, en fonction de *a*, la distance *DG*.

b) Déterminer et construire l'ensemble des points *M* du plan vérifiant :

$$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}-3\overrightarrow{MD}\right\|=2\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right\|.$$

Exercice18 :*ABC* est un triangle du plan tel que $AB=10\ cm$, $BC=12\ cm$ et $AC=14\ cm$ et I, J et K sont tels que : $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{AK}=\frac{4}{7}\overrightarrow{AC}$. On note *L* le milieu de $[AB]$.

1) Faire un schéma et construire *I*, *J*, *K* et *L*.

2)Exprimer :*I* comme barycentre de *A* et *B* ;*J* comme barycentre de *C* et *B* ;

K comme barycentre de *C* et *A*.

3) En utilisant *H* le barycentre de $\{(A;\alpha),(B;\beta),(C;\gamma)\}$ où α , β et γ sont des réels que vous choisirez convenablement, montrer que les droites (AJ) , (BK) et (CI) sont concourantes.

4) Question de cours : Montrer que si *a*, *b* et *c* sont des réels de **somme nulle** alors le vecteur $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}$ est un vecteur constant, c'est-à-dire ce vecteur ne dépend pas du point *M*.

2) Déterminer et représenter les ensembles de points suivants avec des couleurs différentes :

a) Ensemble (ξ_1) des points *M* du plan tels que $\left\|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}\right\|=45$.

b) Ensemble (ξ_2) des points *M* du plan tels que $\left\|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|4,5\overrightarrow{MA}+4,5\overrightarrow{MB}\right\|$.

c) Ensemble (ξ_3) des points *M* du plan tels que $3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}$ est orthogonal à $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$.

d) Ensemble (ξ_4) des points *M* du plan tels que $\left\|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|-3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+5\overrightarrow{MC}\right\|$.

Pour construire (ξ_4), on déterminera un point de la figure appartenant à (ξ_4).

Exercice19 : *ABC* est un triangle rectangle en *A* tel que *AB* = *a* et *AC* = 2*a*.
I désigne le milieu de [*AC*] et *G* est le barycentre du système {(*A* ; 3) ; (*B* ; -2) ; (*C* ; 1)}.

1. Construire le point *G* et préciser la nature du quadrilatère *ABIG*.

Exprimer en fonction de : *a* les distances *GA*, *GB* et *GC*.

2) À tout point *M* du plan, on associe le nombre réel :$f(M) = 3MA^2 - 2MB^2 + MC^2$.

a) Exprimer *f* (*M*) en fonction de *MG* et de *a*.

b) Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points *M* du plan tels que : $f(M) = 2a^2$.

3) À tout point *M* du plan, on associe maintenant le nombre réel : $h(M) = 3MA^2 - 2MB^2 - MC^2$.

a) Démontrer qu'il existe un vecteur $\vec{U}$ non nul tel que : $h(M) = \overrightarrow{MB}.\vec{U} - 2a^2$.

b) On désigne par (Δ) l'ensemble des points *M* du plan tels que : $h(M) = -2a^2$.

Vérifier que les points *I* et *B* appartiennent à (Δ), préciser la nature de cet ensemble.

Construire (Δ)

4) (Δ) et (Γ) sont sécants en deux points *E* et *F*. Montrer que les triangles *GEC* et *GFC* sont équilatéraux.

Exercice20 : Soient *A* et *B* deux points du plan tels que *AB* = 8 cm. On appelle *I* le milieu de [*AB*].

1) a) Construire le barycentre *G* des points (*A*, 5) et (*B*, 3).

b) Déterminer l'ensemble (E) des points du plan tels que : $\left\|5\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right\|=16$.

Tracer cet ensemble (E).

2) a) Construire le barycentre *H* des points (*A*, 5) et (*B*, − 3).

b) Déterminer l'ensemble Γ des points du plan tels que $\left(5\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right)\cdot\left(5\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\right)=0$.

Tracer cet ensemble Γ.

Exercice21 : *A*, *B* et *C* sont trois points non alignés tels que *AB* = *AC* = 5 et *BC* = 4. *I* est le milieu de [*BC*]. J est défini par : $\overrightarrow{BJ}=-2\overrightarrow{BC}$.

G est le barycentre de (*A* ; 1), (*B* ; 3) et (*C* ; –2).

1) Exprimer le point *J* comme barycentre des points *B* et *C*.

2) a) Montrer que *G* est le barycentre des points *A* et *J*.

b) En déduire la position de *G* sur le segment [*AJ*].

3)a) Exprimer, pour tout point *M* du plan, le vecteur $\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}$ en fonction de $\overrightarrow{MG}$.

b) Exprimer alors en fonction d'une seule distance la norme $\left\|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right\|$.

c) Déterminer l'ensemble Γ des points *M* tels que : $\left\|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$.

d) Tracer l'ensemble Γ.

4)a) Déterminer l'ensemble Δ des points *M* tels que : $(3\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC})\cdot\overrightarrow{MA}=0$.

b) Justifier que le point *I* appartient à l'ensemble Δ puis tracer l'ensemble Δ.

5)a) Calculer $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BJ}$. b) En déduire $\cos ABJ$.

6) *K* est le milieu de [*AB*]. Calculer la longueur *JK*.

Exercice22 : On donne un rectangle *ABCD* du plan dont les côtés [*AB*] et [*BC*] ont pour longueurs respectives *a* et *b*. Pour tout réel *m* non nul, on note G_m le barycentre du système de points pondérés :{(*A*, *m*) ; (*B*, −1) ; (*C*, 1)}.

1) Est-ce que G_m est sur la droite (*BC*) ?

2) Quel est l'ensemble des points *M* du plan tels que $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\sqrt{a^2+b^2}$?

3) Quel est l'ensemble des points *M* du plan tels que $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=a$?

4) Est-ce que l'aire du triangle G_mBC dépend de *m* ?

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien