1er BAC Sciences Expérimentales BIOF
1er BAC Sciences Mathématiques BIOF
Correction série Série N°7 : BARYCENTRE

Exercice01 : On se donne dans le plan un triangle *ABC* rectangle en *A*, tel que *AB* = 2*a* et *AC* = *a* où *a* est une longueur donnée.
1) Déterminer et construire l'ensemble E des points *M* du plan tels que

$$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|.$$

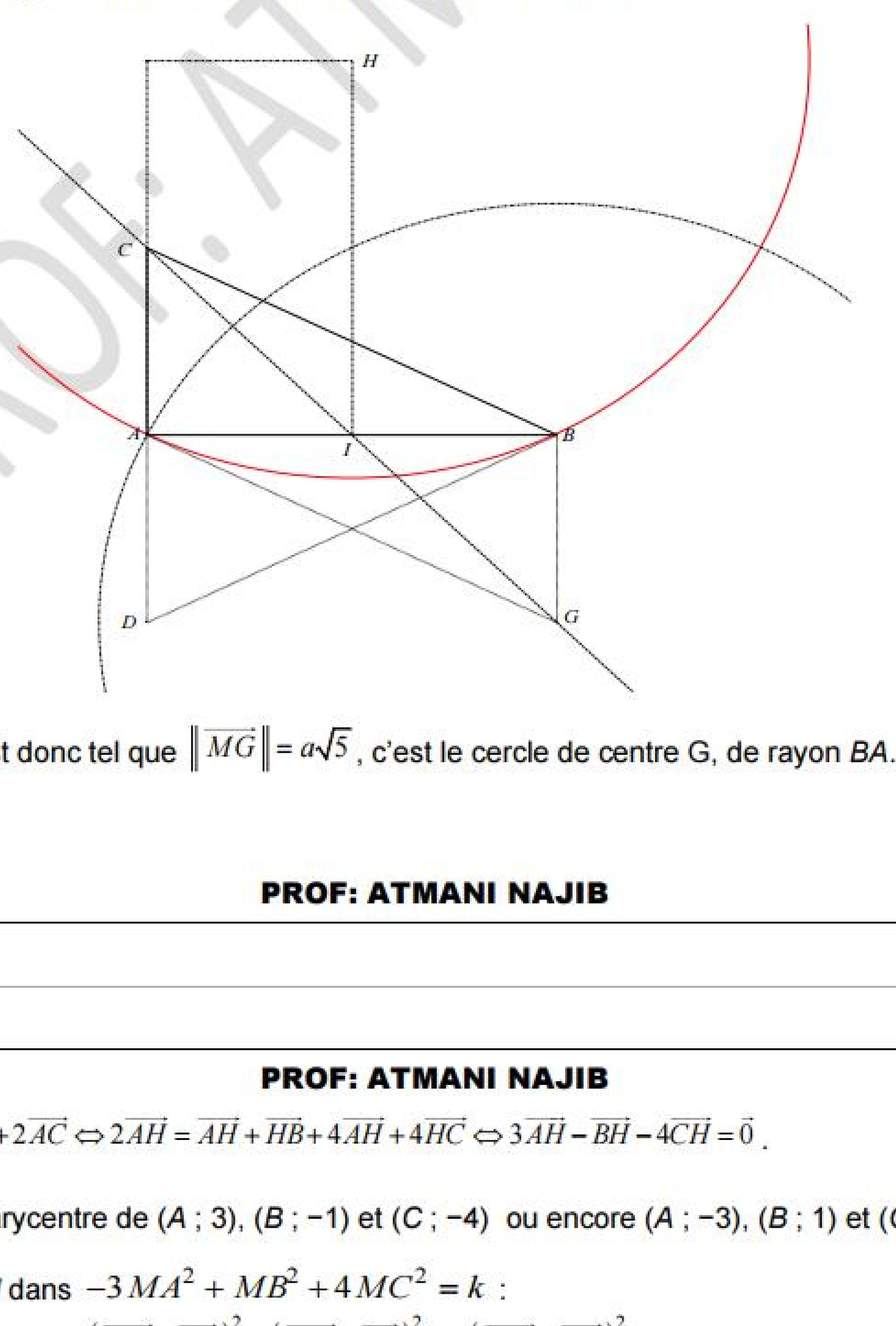
2) On désigne par *H* le point du plan tel que $\overrightarrow{AH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$.

a) Montrer que *H* est le barycentre des points *A*, *B* et *C* affectés de coefficients que l'on déterminera.

b) On considère l'ensemble des points du plan tels que $-3MA^2+MB^2+4MC^2=k$. Pour quelle valeur de *k* cet ensemble contient-il le point A ? Préciser l'ensemble alors obtenu et construisez le.

Solution : 1) On introduit le barycentre *G* de (*A* ; 1), (*B* ; 1) et (*C* ; −1) dans $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$, ce qui donne $\overrightarrow{MG}$; pour construire *G* on prend *I*, milieu de [*AB*] d'où *G* est le barycentre de (*I* ; 2), (*C* ; −1), soit avec la formule magique : $\overrightarrow{IG}=\frac{-1}{2-1}\overrightarrow{IC}=-\overrightarrow{IC}$.

De l'autre côté la somme des coefficients est nulle, on a donc un vecteur constant :
$2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}$. Comme on le voit facilement sur la figure, la longueur de ce vecteur est celle de *BC*, soit : $a\sqrt{5}$.



L'ensemble E est donc tel que $\left\|\overrightarrow{MG}\right\|=a\sqrt{5}$, c'est le cercle de centre G, de rayon *BA*.

2) a) $\overrightarrow{AH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB}+4\overrightarrow{AH}+4\overrightarrow{HC}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{BH}-4\overrightarrow{CH}=\vec{0}$.

Donc *H* est le barycentre de (*A* ; 3), (*B* ; −1) et (*C* ; −4) ou encore (*A* ; −3), (*B* ; 1) et (*C* ; 4).

b) On introduit *H* dans $-3MA^2+MB^2+4MC^2=k$:

$$-3\left(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HB}\right)^2+4\left(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HC}\right)^2=k$$
$$\Leftrightarrow 2MH^2+2\overrightarrow{MH}.\left(-3\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+4\overrightarrow{HC}\right)-3HA^2+HB^2+4HC^2=k$$
$$\Leftrightarrow MH^2=\frac{1}{2}\left(k+3HA^2-HB^2-4HC^2\right).$$

Il reste à calculer les longueurs *HA*, *HB* et *HC* et à conclure.

On a évidemment $HA=HB=a\sqrt{5}$ et $HC=a\sqrt{2}$ d'où :
$MH^2=\frac{1}{2}\left(k+15a^2-5a^2-8a^2\right)=\frac{1}{2}\left(k+2a^2\right)$.

Mais ici on demande la valeur de *k* pour laquelle *A* est un point *M*, il suffit alors de remplacer *M* par *A* : $-3MA^2+MB^2+4MC^2=k\Rightarrow -3AA^2+AB^2+4AC^2=k\Leftrightarrow k=4a^2+4a^2=8a^2$.

D'après ce qu'on a obtenu précédemment l'ensemble cherché est un cercle de centre *H* et de rayon : $\sqrt{\frac{1}{2}\left(k++2a^2\right)}=\sqrt{5a^2}=a\sqrt{5}$.
C'est donc le cercle de centre *H* passant

Exercice02 : Dans le triangle ABC, E est le milieu de [AB] et G est le barycentre de :
(A, – 2), (B, – 2), (C, 15).
Démontrer que G, C, et E sont alignés.

Solution : Dans le triangle ABC, E est le milieu de [AB] et G est le barycentre de :
(A, – 2), (B, – 2), (C, 15).
Comme E est le milieu de [AB], c'est le barycentre de (A, – 2), (B, – 2).
Par associativité du barycentre, G est alors le barycentre de (E, – 4) et (C, 15).
Ceci montre que les points G, C, et E sont aligné

Exercice03 : Soit *ABC* un triangle isocèle du plan tel que *AB* = *AC*. On note *I* le milieu de [*BC*] et on donne *AI* = 4*a*, *BC* = 2*a*, *a* réel strictement positif. Pour la figure on prendra *a* = 2 cm.

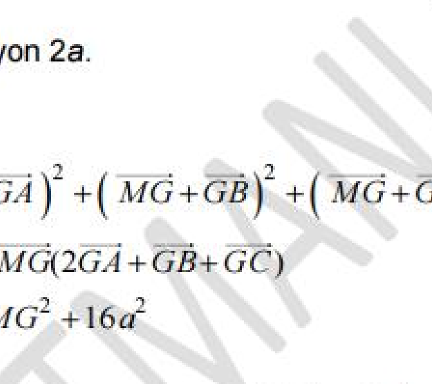
1) On note *G* le barycentre du système $\{(A,2);(B,1);(C,1)\}$. Déterminer et construire l'ensemble des points *M* du plan tels que $\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|$.

2) *k* étant un nombre réel, déterminer l'ensemble des points *M* du plan tels que $2MA^2+MB^2+MC^2=ka^2$ (on discutera suivant les valeurs de *k*).

3)On prend *a* = 1 et on construit un repère du plan de centre *I*, de sorte que les vecteurs de base soient $\vec{i}=\overrightarrow{IC}$ et $\vec{j}=\frac{1}{4}\overrightarrow{IA}$.

Déterminer les coordonnées de *A*, *B*, *C* et *G*. Retrouver alors les réponses du 1. et du 2.

Solution :



1) *G* est le milieu de [*AI*] ;

On a $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{MG}$ et
$2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}=2\overrightarrow{IA}$

On a donc $\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|\Leftrightarrow 4MG=2IA\Leftrightarrow MG=\frac{1}{2}IA=2a$

C'est le cercle de centre *G*, de rayon 2*a*.

2) On développe et on réduit :

$$2MA^2+MB^2+MC^2=2\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)^2$$
$$=4\overrightarrow{MG}^2+2GA^2+GB^2+GC^2+2\overrightarrow{MG}(2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})$$
$$=4MG^2+2(4a^2)+4a^2+4a^2=4MG^2+16a^2$$

On cherche donc l'ensemble des points *M* tels que $4MG^2+16a^2=ka^2\Leftrightarrow MG^2=\left(\frac{k-16}{4}\right)a^2$.
Lorsque *k* < 16, cet ensemble est vide ; lorsque *k* = 16, cet ensemble est réduit au point *G* ; lorsque *k* > 16, cet ensemble est le cercle de centre *G*, de rayon $\frac{a}{2}\sqrt{16-k}$.

3) *A* (0 ; 4), *B* (−1 ; 0), *C* (1 ; 0), *G* (0 ; 2).

On prend un point *M* (*x* ; *y*) et on remplace :

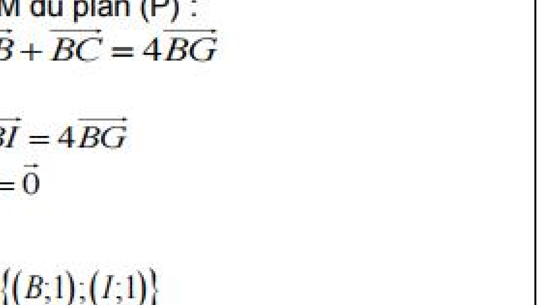
$$2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\begin{pmatrix}0-x\\4-y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1-x\\0-y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1-x\\0-y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4x\\8-4y\end{pmatrix}\Rightarrow\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|^2=16\left[x^2+(2-y)^2\right];$$

$$2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=2\begin{pmatrix}0-x\\4-y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1-x\\0-y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1-x\\0-y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\8\end{pmatrix}\Rightarrow\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|^2=64$$

D'où : $\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|\Leftrightarrow x^2+(y-2)^2=4$, soit le cercle de centre *G*, de rayon 2.

Pour le 2. C'est pareil évidemment…

Exercice04 : Soit ABCD un parallélogramme. On considère les points suivants :
→ I et J les milieux respectifs de [AD] et [BC] ;
→ K et L les points de [AB] tels que : AK = KL = LB ;
→ G est le barycentre du système pondéré : $\{(A;2);(B;1);(C;1)\}$
1) Faire une figure correspondante.
2) a) Montrer que G est le milieu du segment [AJ].
b) En déduire que les droites (AJ) et (BI) sont sécantes en G
3) a) Montrer que G est le barycentre des points pondérés (K ; 3) et (C ; 1) :
b) En déduire que G ∈ (CK)
4) a) Montrer que G est le barycentre des points pondérés (D ; 1) et (L ; 3)
b) Montrer que les droites (AJ) ; (BI), (CK) et (DL) sont concourantes au point G.



Solution :1) La figure.
2)a) Montrons que G est le milieu du segment [AJ] :
On a J est le milieu du segment [BC] c'est-à-dire :
$\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JC}=\vec{0}$
Donc J est le barycentre du système pondéré : $\{(B;1);(C;1)\}$
et comme G est le barycentre du système pondéré : $\{(A;2);(B;1);(C;1)\}$
et d'après l'associativité du barycentre on déduit que G est le barycentre du système pondéré : $\{(A;2);(J;2)\}$ par ailleurs G est le barycentre du système pondéré : $\{(A;1);(J;1)\}$
Ceci signifie que G est le milieu du segment [AJ] :
b) On déduit que les droites (AJ) et (BI) sont sécantes en G:
On a G est le barycentre du système pondéré : $\{(A;2);(B;1);(C;1)\}$
Donc : d'après la propriété caractéristique on a pour tout point M du plan (P) :
$2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{MG}$:pour M = B on obtient : $2\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BB}+\overrightarrow{BC}=4\overrightarrow{BG}$
C'est-à-dire : $2\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=4\overrightarrow{BG}$ et comme : $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$
$2\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=4\overrightarrow{BG}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{AI}=4\overrightarrow{BG}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BI}=4\overrightarrow{BG}$
$\Leftrightarrow -2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AB}+2\left(\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GI}\right)=4\overrightarrow{BG}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{BG}+2\overrightarrow{GI}-4\overrightarrow{BG}=\vec{0}$
$\Leftrightarrow -2\overrightarrow{BG}+2\overrightarrow{GI}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GI}=\vec{0}$
Comme $(1+1\neq 0)$ alors G est barycentre du système pondéré : $\{(B;1);(I;1)\}$
Ceci signifie que : $G\in(BI)$ et comme : $G\in(AJ)$ donc on d'déduit que les droites (AJ) et (BI) sont sécantes en G:
3) a) Montrons que G est la barycentre des points pondérés (K; 3) et (C; 1):
On a AK = LB et comme les vecteurs : $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{LB}$ ont le même sens on déduit que :
$\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{LB}\Leftrightarrow\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{LB}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AK}-\left(\overrightarrow{LK}+\overrightarrow{KB}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AK}-\left(\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}\right)=\vec{0}$
$\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{LB}\Leftrightarrow\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{KA}-\overrightarrow{KB}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}=\vec{0}$
Comme :$(2+1\neq 0)$ alors K est le barycentre du système pondéré : $\{(A;2);(B;1)\}$
et puisque G est le barycentre du système pondéré : $\{(A;2);(B;1);(C;1)\}$
et d'après l'associativité du barycentre on déduit que G est le barycentre du système pondéré : $\{(K;3);(C;1)\}$
b) En déduit que G ∈ (CK)
On a G est le barycentre du système pondéré : $\{(K;3);(C;1)\}$ ceci signifie que : G ∈ (CK)

4) a) Montrons que G est le barycentre des points pondérés : $(D;1)\ et\ (L;3)$
On a G est le barycentre du système pondéré : $\{(K;3);(C;1)\}$
Donc : $3\overrightarrow{GK}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Leftrightarrow 3\left(\overrightarrow{GL}+\overrightarrow{LK}\right)+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GL}+3\overrightarrow{LK}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GL}+3\overrightarrow{LK}+\left(\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{DC}\right)=\vec{0}$
Donc : $3\overrightarrow{GK}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GL}+\overrightarrow{GD}+3\overrightarrow{LK}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GL}+\overrightarrow{GD}+3\overrightarrow{LK}+3\overrightarrow{KL}=\vec{0}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GL}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$
Comme :$(3+1\neq 0)$ alors : G est le barycentre du système pondéré $\{(L;3);(D;1)\}$
b) Montrons que les droites (AJ) ; (BI) ; (CK) et (DL) sont concourantes en G:
On a G est le barycentre du système pondéré $\{(L;3);(D;1)\}$. Ceci signifie que : G ∈ (DL).
D'autre part G appartient a (AJ) et (BI) et (CK).
Donc le point G appartient aux 4 droites (AJ); (BI); (CK) et (DL) ce qui prouve que ces 4 Droites sont concourantes au point G.

Exercice05 : ABCD est un quadrilatère. On note G son isobarycentre. Le but de cet exercice est de préciser la position du point G.
1) On note I le milieu de [AC] et J le milieu de [BD]. Démontrer que G est le barycentre de I et J munis de coefficients que l'on précisera.
2) Conclure et faire une figure.
3) Si ABCD est un parallélogramme, préciser la position du point G

Solution : 1) On note I le milieu de [AC] et J le milieu de [BD]. I est le barycentre de (A, 1) et (C, 1) tandis que J est le barycentre de (B, 1) et (D, 1). On en déduit par associativité du barycentre que G, barycentre de (A, 1), B, 1), (C, 1), (D, 1) est aussi le barycentre de (I, 2) et (J, 2).
Autrement dit, G est le milieu de [IJ].
2) La figure ne présente aucune difficulté, on construit I, J et G qui sont les milieux des segments [AC],[BD] et [IJ].
3) Si ABCD est un parallélogramme, [AC] et [BD] se coupent en leur milieu et donc d'après ce qui Précède les points I et J sont confondus. Le point G, milieu de [IJ] est alors confondu avec I et J. G est donc le centre du parallélogramme

Exercice06 : ABCD est un quadrilatère et G est le barycentre de (A, 1), (B, 1) (C, 3) (D, 3).
Construire le point G et expliquer votre construction.

Solution : ABCD est un quadrilatère et G est le barycentre de (A, 1), (B, 1) (C, 3) (D, 3).
Plusieurs constructions sont possibles. Par exemple, on construit le milieu I de [AB] qui est le barycentre de (A, 1) et (B, 1). Puis on construit le milieu J de [CD] qui est le barycentre de (C, 3) et (D, 3). Par associativité du barycentre, l e point G est alors le barycentre de (I, 2) et (J, 6).
Donc le point G vérifie la relation : $2\overrightarrow{GI}+6\overrightarrow{GJ}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{GI}+3\left(\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IJ}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow 4\overrightarrow{IG}=3\overrightarrow{IJ}\Leftrightarrow\overrightarrow{IG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{IJ}$
Ceci permet de placer le point G sans difficulté.

Exercice07 :*ABC* est un triangle, *J* est le milieu de [*AC*], *K* celui de [*JB*], et *I* le point tel que : $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.
On se propose de démontrer de deux façons différentes que les points *C*, *K* et *I* sont alignés.
1) A l'aide du calcul vectoriel.
a) Montrer que $\overrightarrow{CI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$.
b) Montrer que $\overrightarrow{CK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.
c) En déduire que *C*, *K* et *I* sont alignés.
2) A l'aide de barycentres.
a) Exprimer le point *I* comme barycentre de *A* et *B*.
b) En considérant le barycentre de (*A* ; 1), (*B* ; 2) et (*C* ; 1),
Montrer que *C*, *K* et *I* sont alignés.

Exercice08 : Partie A
Soit A, B et C trois points non alignés du plan.
1) Justifier que les systèmes $\{(A,3),(B,-2),(C,1)\}$ et $\{(A,3),(B,-2),(C,3),(C,-2)\}$ admettent un barycentre et qu'il s'agit du même barycentre que l'on notera G.
2) On note I le milieu de $[AC]$ et J celui de $[BC]$. Montrer que $G=\text{bar}\{(I,3),(J,-2)\}$.
3) On note K le milieu de $[AI]$. Montrer que les droites (BK) et (IJ) se coupent en G puis le placer sur une figure.
4) Monter que le quadrilatère $ABIG$ est un parallélogramme.

Partie B :
1) a) Soit *M* un point quelconque du plan. Justifier que le vecteur $\vec{V}=\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ est un vecteur constant puis montrer que pour tout point M du plan, $\vec{V}=2\overrightarrow{BI}$.
b) Déterminer et construire l'ensemble Γ des points *M* du plan tels que : $\left\|\vec{V}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$.
2) a) Déterminer l'ensemble (Δ) des points *M* du plan tels que :
$\left\|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$.
b) Construire (Δ).

Exercice09 : Soit *ABC* un triangle quelconque, *O* le centre du cercle circonscrit à ce triangle (point d'intersection des médiatrices), et *G* son centre de gravité. Soit *H* le point défini par :
$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.
1) a) Soit *A'* le milieu de [*BC*]. Démontrer que : $\overrightarrow{OA'}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$.
b) Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{OA'}$ sont colinéaires.
c)Déduire de a. et b. que *AH* est une hauteur du triangle *ABC*.
2) Démontrer que *H* est l'orthocentre du triangle *ABC*.
3) Soit *M* un point quelconque du plan.
a) Démontrer que $3\overrightarrow{MG}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$.
b) Déduire des questions précédentes que les points *O*, *G* et *H* sont alignés

Exercice10 : Soit *A*, *B*, *P* trois points distincts du plan tels que *P* soit sur le segment [*AB*].
Écrire *P* comme barycentre de *A* et *B* avec des coefficients s'écrivant en fonction des distances : *PA* et *PB*.

Solution : Il suffit de remarquer que : $\overrightarrow{PB}=\frac{PB}{AB}\overrightarrow{AB}$ et que : $\overrightarrow{PA}=-\frac{PA}{AB}\overrightarrow{AB}$

Ceci donne : $PB\times\overrightarrow{PA}+PA\times\overrightarrow{PB}=\vec{0}$
Ainsi, *P* est le barycentre de (*A*, *BP*) et de (*B*, *AP*).

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien