1er BAC Sciences Expérimentales BIOF

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

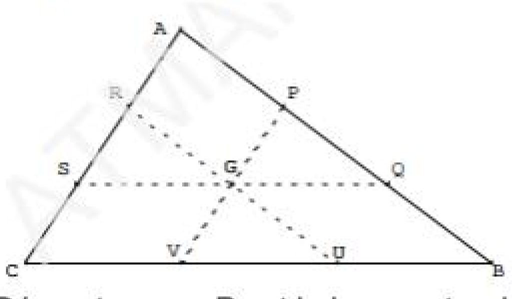
Correction série N°6 : BARYCENTRE

(La correction voir http://www.xriadiat.com)

Exercice01 : ABC est un triangle de centre de gravité G.

On définit les points P, Q, R, S, U, V par : $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AQ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AR}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AS}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$;

$\overrightarrow{BU}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BV}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$



1) Démontrer que P est le barycentre de (A, 2) et (B, 1) et que V est barycentre de (C, 2) et (B, 1).
2) En déduire que G est le milieu de [PV].
3) On démontre, de même, que G est le milieu de [RU] et de [SQ] (inutile de refaire les calculs).
Démontrer que RPUV est un parallélogramme.

Solution : $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PB}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}=\vec{0}$

Donc :P le barycentre des points (A,2) et (B, 1),

$\overrightarrow{BV}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{BV}=2\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{BV}=2\left(\overrightarrow{BV}+\overrightarrow{VC}\right)\Leftrightarrow 2\overrightarrow{VC}+\overrightarrow{VB}=\vec{0}$

Donc :V le barycentre des points (C,2) et (B, 1),
2) On a : G/6 le barycentre de (A, 2), (B, 2) et (C, 2).
Comme : P le barycentre des points (A,2) et (B, 1) et V le barycentre des points (C,2) et (B, 1),
L'associativité du barycentre donne : G/6 le barycentre de (P, 3), (V, 3) .
On en déduit que G est le milieu de [PV].
3) On démontre, de même, que G est le milieu de [RU] et de [SQ] (inutile de refaire les calculs).
G est le milieu de [RU] et de [PV] donc RPUV est un parallélogramme

Exercice02 : Soit ABC un triangle tel que : $AC=6cm$ et $AB=5cm$ et $BC=4cm$

Déterminer et Construire l'ensemble (F) des points M du plan tel que :

$\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$

Solution Soit K le barycentre de (A,2), (B, −1) et (C,2), et G l'isobarycentre de A, B et C.
Alors D'après la propriété caractéristique du barycentre on a :

$\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|\Leftrightarrow\left\|(2+(-1)+2)\overrightarrow{MH}\right\|=\left\|(1+1+)\overrightarrow{MG}\right\|$

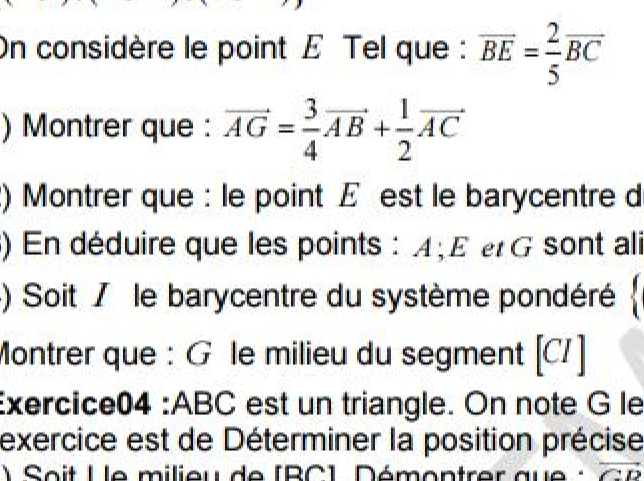
$\Leftrightarrow\left\|3\overrightarrow{MH}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MG}\right\|\Leftrightarrow MH=MG$

$M\in(F)\Leftrightarrow MH=MG$

L'ensemble des points M vérifiant cette relation est donc la médiatrice de [GH]
On a : K est le barycentre de : {(A, 2) ; (B, -1) ; (C, 2)}
Donc : K est le barycentre de : {(B, -1); (I, 2} d'après La propriété d'associativité du barycentre
Avec : I est le milieu du segment $[AC]$

K = Bar {(B, -1); (I, 2} donc : $\boxed{\overrightarrow{BK}=2\overrightarrow{BI}}$

G l'isobarycentre de A, B et C alors G est le point d'intersection des médianes



Exercice03 : Soit ABC un triangle et G est le barycentre du système pondéré $\{(A;1);(B;-3);(C;-2)\}$

On considère le point E Tel que : $\overrightarrow{BE}=\frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$

1) Montrer que : $\overrightarrow{AG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

2) Montrer que : le point E est le barycentre du système pondéré $\{(B;-3);(C;-2)\}$

3) En déduire que les points : $A;E$ et G sont alignés

4) Soit I le barycentre du système pondéré $\{(A;1);(B;-3)\}$

Montrer que : G le milieu du segment $[CI]$

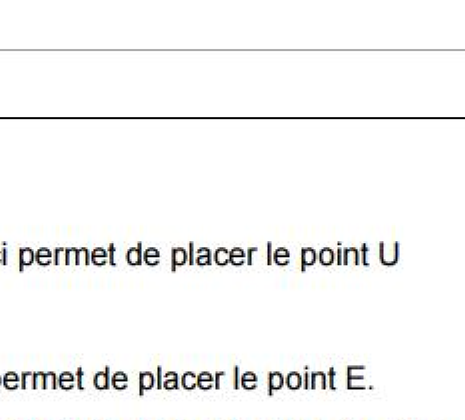
Exercice04 :ABC est un triangle. On note G le barycentre de (A, 2), (B, 1) et (C, 1). Le but de l'exercice est de Déterminer la position précise du point G.
1) Soit I le milieu de [BC]. Démontrer que : $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GI}$
2) En déduire que G est le barycentre de A et I munis de coefficients que l'on précisera.
3) Conclure.

Solution : 1) Soit I le milieu de [BC], on a :

$\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IC}=2\overrightarrow{GI}+\left(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}\right)=2\overrightarrow{GI}+\left(\vec{0}\right)=2\overrightarrow{GI}$

2) G le barycentre des points (A, 2), (B, 1) et (C, 1) donc : $2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$
Comme : $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GI}$ on a donc : $2\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GI}=\vec{0}$
Ainsi G est barycentre des points (A, 2) et (I, 2).
3) Ceci montre que G est le milieu de [AI].
Autre raisonnement possible : I le milieu de [BC] donc I est le barycentre des points (B, 1) et (C, 1).
Comme G est le barycentre des points (A, 2), (B, 1) et (C, 1), on en déduit par associativité du Barycentre, que G est barycentre des points (A, 2) et (I, 2). Donc G est le milieu de [AI].

Exercice05 : ABC est le triangle donné ci-contre
Y est le milieu de [BC].
1) Placer, en justifiant, le barycentre U de (A, 4) et (C, 1).
Puis placer le barycentre E de (A, 4) et (B, 1).
2) Soit G le barycentre de (A, 4), (B, 1) et (C, 1).
Montrer que G est le barycentre de (E, 5) et (C, 1).
3) Démontrer que les droites (EC), (AY) et (BU) sont concourantes



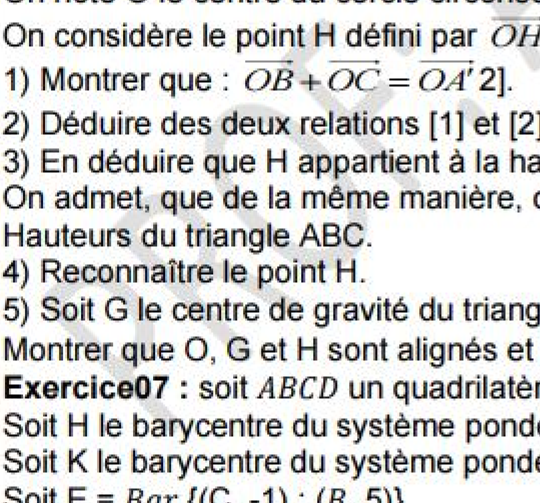
Solution :1) Le barycentre U de (A, 4) et (C, 1) vérifie la relation :

$4\overrightarrow{UA}+\overrightarrow{UC}=\vec{0}\Leftrightarrow 4\overrightarrow{UC}+4\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{UC}=\vec{0}\Leftrightarrow 5\overrightarrow{UC}+4\overrightarrow{CA}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{CU}=\frac{4}{5}\overrightarrow{CA}$: Ceci permet de placer le point U

Le barycentre E de (A, 4) et (B, 1) vérifie la relation :

$4\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}=\vec{0}\Leftrightarrow 4\overrightarrow{EB}+4\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{EB}=\vec{0}\Leftrightarrow 5\overrightarrow{EB}+4\overrightarrow{BA}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{BE}=\frac{4}{5}\overrightarrow{BA}$ Ceci permet de placer le point E.

2) Soit G le barycentre de (A, 4), (B, 1) et (C, 1). Comme E est le barycentre de (A, 4) et (B, 1), on a par associativité que G est le barycentre de (E, 5) et (C, 1).
3) →Comme G est le barycentre de (E, 5) et (C, 1)
Alors : les points G, E, C sont alignés
→ Comme Y est le milieu de [BC], Y est aussi le barycentre de (B, 1) et (C, 1).
G est barycentre de (A, 4), (B, 1) et (C, 1), par associativité du barycentre, G est aussi le Barycentre de (A, 4) et (Y, 2). Ceci prouve que les points A, Y et G sont alignés.
→ Comme G est le barycentre de (A, 4), (B, 1), (C,1) et que U est le barycentre de (A, 4) et (C, 1), par associativité G est le barycentre de (B, 1) et (U, 5).
Donc les points G, B, U sont alignés.
→ On peut donc dire que les droites (EC), (AY) et (BU) sont concourantes en G.



Exercice06 : On considère un triangle ABC et A' le milieu de [BC].
On note O le centre du cercle circonscrit à ce triangle.
On considère le point H défini par $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ [1].
1) Montrer que : $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA'}$ 2].
2) Déduire des deux relations [1] et [2] que : $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{OA'}$.
3) En déduire que H appartient à la hauteur issue de A dans le triangle ABC.
On admet, que de la même manière, on peut démontrer que le point H appartient aux deux autres Hauteurs du triangle ABC.
4) Reconnaître le point H.
5) Soit G le centre de gravité du triangle ABC.
Montrer que O, G et H sont alignés et que : $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$

Exercice07 : soit $ABCD$ un quadrilatère convexe
Soit H le barycentre du système pondéré : {(A, 2) ; (B, 5); (C, -1) }
Soit K le barycentre du système pondéré : {(B, 5) ; (C, -1) ; (D, 6)}
Soit E = Bar {(C, -1) ; (B, 5)}

1) Montrer que : $\overrightarrow{BE}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ et Construire E

2) Montrer que H est le barycentre du système pondéré {(A, 1) ; (E, 2)} et Construire H
3) Montrer que K est le barycentre du système pondéré {(D, -3) ; (E, 2)}
4) a) Montrer que D est le barycentre du système pondéré {(K, 1) ; (E, 2)}
b) En déduire que $(AK)\parallel(DH)$

Exercice08 : Soit $ABCD$ un quadrilatère, *I* le milieu de [*AC*] et *J* celui de [*BD*].
Soit *K* le point défini par : $\overrightarrow{KA}=-2\overrightarrow{KB}$ et *L* celui défini par $\overrightarrow{LC}=-2\overrightarrow{LD}$. *M* le milieu de [*LK*].

Le but du problème est de montrer que *M*, *I* et *J* sont alignés et de donner la position de *M* sur la droite (*IJ*).

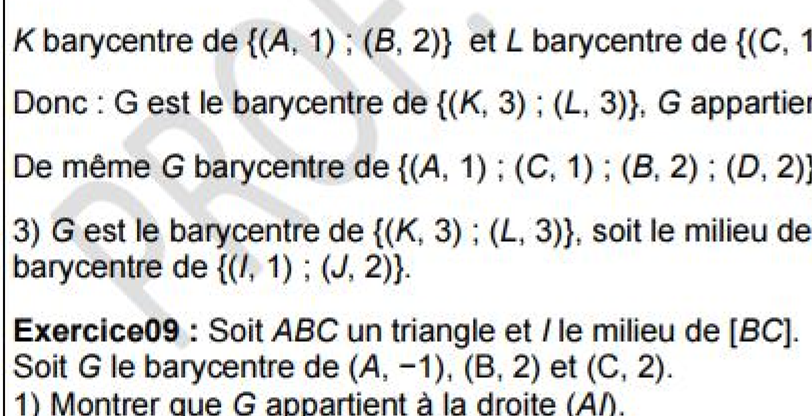
1) Faire une figure.
2) Justifier l'existence du barycentre *G* de {(*A*, 1) ; (*B*, 2) ; (*C*, 1) ; (*D*, 2)}. En associant les points de différentes façons, montrer que *G* appartient aux droites (*KL*) et (*IJ*).
3) Montrer que *G* et *M* sont confondus, que *M* est aligné avec *I* et *J*

Puis donner la position de *M* sur (*IJ*).

Solution : 1) On a : $\overrightarrow{KA}=-2\overrightarrow{KB}\Leftrightarrow\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=\vec{0}$

Soit *K* barycentre de {(*A*, 1); (*B*, 2)} et $\overrightarrow{LC}=-2\overrightarrow{LD}$

Soit *L* barycentre de {(*C*, 1) ; (*D*, 2)}.



2) *G* barycentre de {(*A*, 1) ; (*B*, 2) ; (*C*, 1) ; (*D*, 2)} existe car la somme des coefficients n'est pas nulle.

K barycentre de {(*A*, 1) ; (*B*, 2)} et *L* barycentre de {(*C*, 1) ; (*D*, 2)}

Donc : G est le barycentre de {(*K*, 3) ; (*L*, 3)}, *G* appartient à (*KL*).

De même *G* barycentre de {(*A*, 1) ; (*C*, 1) ; (*B*, 2) ; (*D*, 2)}, soit de {(*I*, 2) ; (*J*, 4)}, *G* appartient à (*IJ*).

3) *G* est le barycentre de {(*K*, 3) ; (*L*, 3)}, soit le milieu de [*KL*], *G* = *M* ; il est également sur (*IJ*) et le barycentre de {(*I*, 1) ; (*J*, 2)}.

Exercice09 : Soit *ABC* un triangle et *I* le milieu de [*BC*].
Soit *G* le barycentre de (*A*, −1), (B, 2) et (C, 2).
1) Montrer que *G* appartient à la droite (*AI*).
2) Soit *H* le symétrique de *A* par rapport à *B*.
Montrer que *C*, *G* et *H* sont alignés.

Exercice10 : Soit *I* le centre d'un parallélogramme non aplati *ABCD*.
1) Déterminer des coefficients *b*, *c*, *d* pour lesquels *I* est le barycentre de {(*B*, *b*) ; (*C*, *c*) ; (*D*, *d*)}.
2) Quel est l'ensemble des points *G*, barycentres des points *A*, *B*, *C* et *D* affectés des coefficients λ, 2, $\lambda-1$ et $1-2\lambda$ où λ est un réel quelconque
3) Préciser la valeur de λ pour laquelle *G* est un point de (*AC*).

Solution : Soit *I* le centre d'un parallélogramme non aplati *ABCD*.
1) Comme *I* est le milieu de [*BD*], *C* ne compte pas et on prend *I* le barycentre de {(*B*, 1) ; (*C*, 0) ; (*D*, 1)}

2) Ecrivons la relation : $\lambda\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}+(\lambda-1)\overrightarrow{GC}+(1-2\lambda)\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ et introduisons un des points partout, par exemple *A* : $\lambda\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{AB}+(\lambda-1)\overrightarrow{GA}+(\lambda-1)\overrightarrow{AC}+(1-2\lambda)\overrightarrow{GA}+(1-2\lambda)\overrightarrow{AD}=\vec{0}$, soit

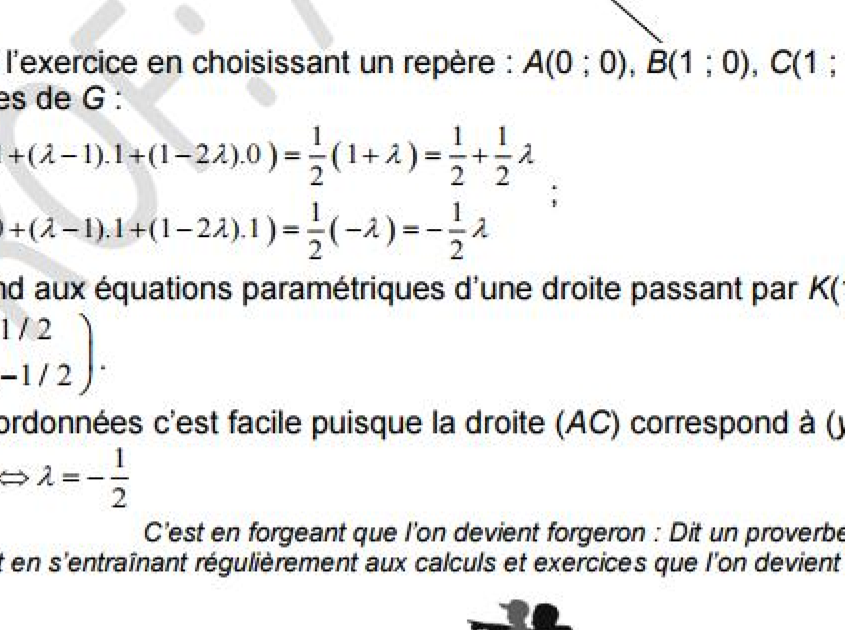
$(\lambda+2+\lambda-1+1-2\lambda)\overrightarrow{GA}=-2\overrightarrow{AB}-(\lambda-1)\overrightarrow{AC}-(1-2\lambda)\overrightarrow{AD}\Leftrightarrow\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\left(2\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}-2\lambda\overrightarrow{AD}\right)$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\left(2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\right)+\frac{\lambda}{2}(\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AD})$.

Le choix de *A* n'était visiblement pas le plus malin… et la première question peut suggérer de prendre *I*. En tous cas il semble qu'il faille aboutir à quelque chose du style $\overrightarrow{KG}=\lambda\vec{u}$ où $\vec{u}$ est fixe.

Appelons $\vec{u}$ le vecteur $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AD})$ et introduisons *K* (inconnu) :

$\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KG}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}+\lambda\vec{u}$ d'où en choisissant *K* tel que $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$, on a $\overrightarrow{KG}=\lambda\vec{u}$, c'est-à-dire la droite passant par *K* et de vecteur directeur $\vec{u}$. En fait le point *K* est bêtement le milieu de [*AB*].



On peut traiter l'exercice en choisissant un repère : *A*(0 ; 0), *B*(1 ; 0), *C*(1 ; 1) et *D*(1 ; 1) d'où on tire les coordonnées de *G* :

$$\begin{cases}x=\frac{1}{2}(\lambda.0+2.1+(\lambda-1).1+(1-2\lambda).0)=\frac{1}{2}(1+\lambda)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lambda\\ y=\frac{1}{2}(\lambda.0+2.0+(\lambda-1).1+(1-2\lambda).1)=\frac{1}{2}(-\lambda)=-\frac{1}{2}\lambda\end{cases};$$

Ceci correspond aux équations paramétriques d'une droite passant par *K*(1/2 ; 0) et de vecteur directeur $\vec{u}=\begin{pmatrix}1/2\\-1/2\end{pmatrix}$.

3) Avec les coordonnées c'est facile puisque la droite (*AC*) correspond à (*y* = *x*). Il faut donc $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lambda=-\frac{1}{2}\lambda\Leftrightarrow\lambda=-\frac{1}{2}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien