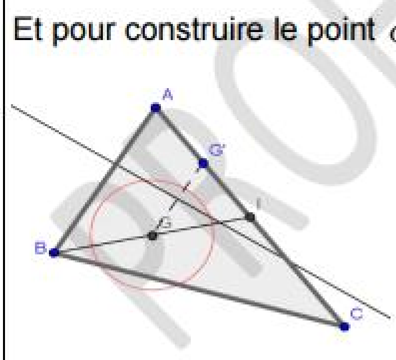
1er BAC Sciences Expérimentales BIOF
1er BAC Sciences Mathématiques BIOF
Correction série N°4 : BARYCENTRE

Exercice01 : On considère un triangle ABC. On appelle I le milieu de [BC].
1) Démontrer que : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AI}$
2) Exprimer I comme barycentre des points A et B
Solution :1) I le milieu de [BC].
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC}=2\overrightarrow{AI}+\left(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}\right)=2\overrightarrow{AI}+\vec{0}=2\overrightarrow{AI}$
2) I le milieu de [BC] Signifie que : $\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$
Signifie que : I est le barycentre du système pondéré : $\{(B;1);(C;1)\}$

Exercice02 : Soit ABC un triangle tel que : $AC=6cm$ et $AB=5cm$ et $BC=4cm$
a) Construire G le barycentre de : {(A, 1); (B, 2); (C, 1)}
b) Déterminer et Construire l'ensemble (E) des points M du plan tel que : $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=AC$
c) Déterminer et Construire l'ensemble (F) des points M du plan tel que :
$\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MC}\right\|$
Solution : G est le barycentre de : {(A, 1); (B, 2); (C, 1)}
Donc : G est le barycentre de : {(B, 2); (I, 2} d'après La propriété d'associativité du barycentre
Donc :G est le milieu du segment $[BI]$
b) D'après la propriété caractéristique du barycentre on a : $\left\|4\overrightarrow{MG}\right\|=AC\Leftrightarrow GM=\frac{AC}{4}=1.5$
Donc l'ensemble des points est le cercle de centre G et de rayon $r=1.5cm$
b) Soit G' est le barycentre de : {(A, 3); (C, 1)}
Donc d'après la propriété caractéristique du barycentre on a : $\forall M\in(P)$
$\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{MG}$ et $3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{MG'}$
Donc : $M\in(F)\Leftrightarrow 4MG=4MG'\Leftrightarrow MG=MG'$
Donc : (F) est la médiatrice du segment $[GG']$
Et pour construire le point G' on a : $\overrightarrow{AG'}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$



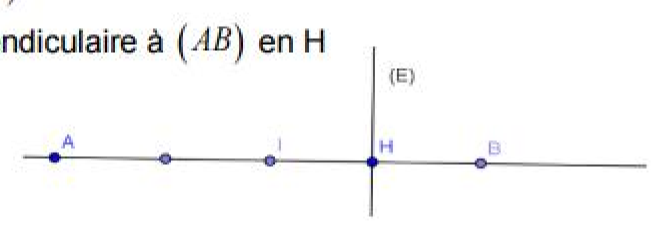
Exercice03 : ABC un triangle et I un point tel que : $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et K le symétrique de A par rapport à : C et J le milieu du segment $[BC]$
1) Exprimer I et J et K comme le barycentre de points pondérés a déterminer
2) Quelle est le barycentre des points pondérés : $(A;1)$;$(B;2)$; $(B;-2)$ et $(C;-2)$?
3) Monter que les points I et J et K sont alignés.
Solution :1)
- On a J le milieu du segment $[BC]$

Donc : J est le barycentre des points pondéré $(B;1)$ et $(C;1)$
- On a : $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{AI}+2\overrightarrow{IB}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ Donc : I est le barycentre des points pondéré $(A;1)$ et $(B;2)$
- On a : K le symétrique de A par rapport a C

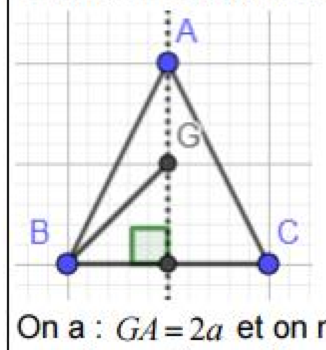
Donc : $2\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{KA}$
Donc : $\overrightarrow{KA}-2\overrightarrow{KC}=\vec{0}$
Donc : K est le barycentre des points pondéré $(A;1)$ et $(C;-2)$
2) On a : K est le barycentre des points pondéré $(A;1)$ et $(C;-2)$
Donc : $1\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}-2\overrightarrow{KB}-2\overrightarrow{KC}=\vec{0}$
Donc : K est le barycentre des points pondéré $(A;1)$ et $(B;2)$ et $(B;-2)$ et $(C;-2)$
3) D'après La propriété d'associativité on trouve que K le barycentre des points pondéré $(J;-4)$ et $(I;3)$ par suite : $K\in(IJ)$ donc les points I et J et K sont alignés.

Exercice04 : A et B deux points tel que : $AB=4cm$ et I le milieu du segment $[AB]$
1) Soit : (E) l'ensemble des points M du plan tel que : $\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}=4$ et soit H le barycentre des points pondérés $(A;1)$;$(B;3)$
a) Montrer que : $H\in(E)$
b) Vérifier que : $M\in(E)\Leftrightarrow\overrightarrow{HM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$
c) Déterminer la nature de l'ensemble (E)
2) Soit : (F) l'ensemble des points M du plan tel que : $MA^2-MB^2=8$
a) Montrer que : $\forall M\in(P)$ on a : $MA^2-MB^2=2\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}$
b) En déduire que $(F)=(E)$ et le tracer
Solution :1) On a : H le barycentre des points pondérés $(A;1)$;$(B;3)$ donc : $\overrightarrow{AH}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$
Et on a $\overrightarrow{IH}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AH}$ donc $\overrightarrow{IH}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$
Donc $\overrightarrow{IH}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ par suite $\overrightarrow{IH}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{4}AB^2=4$
Donc $H\in(E)$
b) $M\in(E)\Leftrightarrow\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}=4\Leftrightarrow\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{IH}\cdot\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{IM}-\overrightarrow{IH}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{HM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$
c)de b) on déduit que (E) est la droite perpendiculaire a (AB) en H
2) a) $MA^2-MB^2=0\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right)=2\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}$ car d'après La propriété caractéristique du barycentre on a : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$
2)b) $M\in(F)\Leftrightarrow MA^2-MB^2=8\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AB}=4\Leftrightarrow M\in(E)$
Donc $(F)=(E)$ par suite (F) est la droite perpendiculaire à (AB) en H



Exercice05 : Soit ABC un triangle isocèle en A

O Le milieu du segment $[BC]$ et $OA=4a$; $BC=2a$ avec : $a\in\mathbb{R}_*^+$
Déterminer l'ensemble (F) des points M du plan tel que : $2MA^2+MB^2+MC^2=ka^2$
Solution : $2MA^2+MB^2+MC^2=ka^2\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2=ka^2$
Soit : G est le barycentre de : {(A, 2); (B, 1); (C, 1)}
$2\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2=ka^2\Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)^2=ka^2$
$\Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{MG}\right)^2+4\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA}+2\left(\overrightarrow{GA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}\right)^2+2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB}+\left(\overrightarrow{GB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}\right)^2+2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GC}+\left(\overrightarrow{GC}\right)^2=ka^2$
$\Leftrightarrow 4\left(\overrightarrow{MG}\right)^2+2\overrightarrow{MG}\left(2.\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)+2GA^2+GB^2+GC^2=ka^2$
$\Leftrightarrow 4MG^2+2\overrightarrow{MG}.\left(\vec{0}\right)+2GA^2+GB^2+GC^2=ka^2$
$\Leftrightarrow 4MG^2+2GA^2+GB^2+GC^2=ka^2$
Comme :G est le barycentre de : {(A, 2); (B, 1); (C, 1)}
Donc : G est le barycentre de : {(A, 2) ; (I, 2} d'après La propriété d'associativité du barycentre
Donc : G est le milieu du segment $[AI]$



On a : $GA=2a$ et on montre que : $GB^2=4a^2$ (Pythagore) et $GC^2=4a^2$
$2\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2=ka^2\Leftrightarrow 4MG^2+2GA^2+GB^2+GC^2=ka^2\Leftrightarrow 4MG^2+8a^2+5a^2+5a^2=ka^2$
$2\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2=ka^2\Leftrightarrow 4MG^2+18a^2=ka^2\Leftrightarrow 4MG^2=a^2(k-18)$
Si : $k\prec 18$: $(F)=\varnothing$
Si : $k=18$: $MG=0$ donc : $(F)=\{G\}$
Si : $k\succ 18$: $4MG^2=a^2(k-18)\Leftrightarrow MG=\sqrt{\frac{a^2(k-18)}{4}}=\frac{a}{2}\sqrt{k-18}$
Donc : l'ensemble des points est le cercle de centre G et de rayon : $r=\frac{a}{2}\sqrt{k-18}$
Avec : G est le milieu du segment $[AI]$ et I le milieu du segment $[BC]$

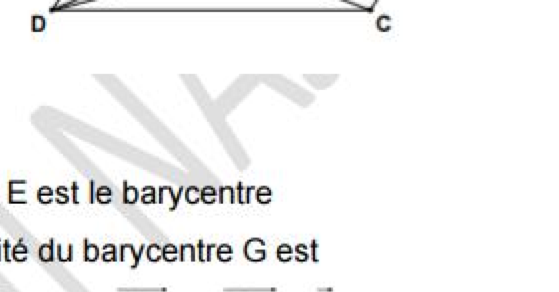
Exercice06 : Dans le plan (P) rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\|=1cm$
On considère les points : $A(-6;3)$; $B(6;7)$ et $C(6;-5)$
Soit G Le barycentre du système pondéré {(A, 1) ; (B, 2) ; (C, 1)} et I le milieu du segment $[AC]$
1) Déterminer les coordonnées de G dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$
2) Montrer que G est le milieu du segment $[IB]$
3) Déterminer et Construire dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ l'ensemble (E) des points M du plan
Tel que : $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=8cm$

4)Soit H Le barycentre du système pondéré : {(A, 3) ; (B, 2)}
a) Montrer que : $\overrightarrow{AH}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et construire H
b) Déterminer et Construire dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ l'ensemble (F) des points M du plan tel que : $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right\|$

Exercice07 : Dans le plan (P) rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$
On considère les points : $A(-6;-1)$; $B(2;3)$
Soit G Le barycentre du système pondéré $\{(A;2);(B;-4)\}$ et I le milieu du segment $[AB]$
1) Déterminer les coordonnées de G dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$
2)a) Montrer que : $2\overrightarrow{MA}-4\overrightarrow{MB}=-2\overrightarrow{MG}$ et $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$ pour tous points M du plan
b) En déduire et construire dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ l'ensemble (D) des points M du plan tel que :
$\left\|2\overrightarrow{MA}-4\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|$

Exercice08 : ABCD est un parallélogramme de centre O: G est le barycentre du système pondéré : $\{(B;2);(C;-1);(D;2)\}$ et E est le barycentre du système pondéré : $\{(B;2);(C;-1)\}$
1) Vérifier que B est le milieu du segment [CE] :
2) a) Exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de : $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ puis déduire que : $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$
b) Construire une figure.
c) Montrer que G est le centre de gravité du triangle ABD :
3) Montrer que les points D; G et E sont alignés.
4) Soit I le point d'intersection des droites (DG) et (AB) et p la projection sur (DB)
Parallèlement a (DC) : On pose : $G'=p(G)$
Montrer que : $\overrightarrow{DG'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DB}$
Solution :1) Vérifions que B est le milieu du segment [CE] :
On a E est le barycentre du système pondéré $\{(B;2);(C;-1)\}$: On a d'après la propriété caractéristique : $\forall M\in(P)$: $2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{ME}$
Pour M = B, on obtient : $2\overrightarrow{BB}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BE}$
C'est-à-dire : $-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BE}\Leftrightarrow\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{BE}$
Ceci signifie que B est le milieu du segment [CE]
2) a) Exprimons $\overrightarrow{AG}$ en fonction de : $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$
On a : G est le barycentre du système pondéré $\{(B;2);(C;-1);(D;2)\}$
On a : d'après la propriété caractéristique : $\forall M\in(P)$: $2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}+2\overrightarrow{MD}=3\overrightarrow{MG}$
Pour M = A, on obtient : $2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AG}$
C'est-à-dire : $2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AG}\Leftrightarrow\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$
Donc : $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

On a ABCD est un parallélogramme alors : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ et comme :
$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$
Donc : $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}\right)-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$
Donc : $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{DA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$
Donc : $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$
b) Figure.



c) Montrons que G est le centre de gravité du triangle ABD
:On a : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{GA}+\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AD}\right)$
$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GD}=3\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$
Donc : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GD}=-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$
Donc : le point G est le centre de gravité du triangle ABD
3)Montrons que les points D ; G et E sont alignés.
On a G est le barycentre du système : $\{(B;2);(C;-1);(D;2)\}$ et E est le barycentre
Du système pondéré : $\{(B;2);(C;-1)\}$ donc d'après l'associativité du barycentre G est
Le barycentre du système pondéré : $\{(E;1);(D;2)\}$ ce qui signifie que : $\overrightarrow{GE}+2\overrightarrow{GD}=\vec{0}$
C'est-à dire : $\overrightarrow{GE}=-2\overrightarrow{GD}$
Donc les points : G ; E et D sont alignés
4) Montrons que : $\overrightarrow{DG'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DB}$
On a G est le barycentre du système pondéré : $\{(B;2);(C;-1);(D;2)\}$
Donc : $G'=p(G)$) est le barycentre du système pondéré : $\{(p(B);2);(p(C);-1);(p(D);2)\}$
Avec p est la projection sur la droite (DB) parallèlement a (DC) :
Comme : $G'=p(G)$; $D=p(D)$; $D=p(C)$ et $B=p(B)$
Alors $G'=p(G)$ est le barycentre du système pondéré : $\{(B;2);(D;-1);(D;2)\}$
C'est-à dire : G' est le barycentre du système pondéré : $\{(B;2);(D;1)\}$
On a : d'après la propriété caractéristique : $\forall M\in(P)$: $2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}=3\overrightarrow{MG'}$
Pour M = D, on obtient : $2\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DD}=3\overrightarrow{DG'}$
C'est-à-dire : $2\overrightarrow{DB}=3\overrightarrow{DG'}\Leftrightarrow\overrightarrow{DG'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DB}$ Donc : $\overrightarrow{DG'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DB}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien