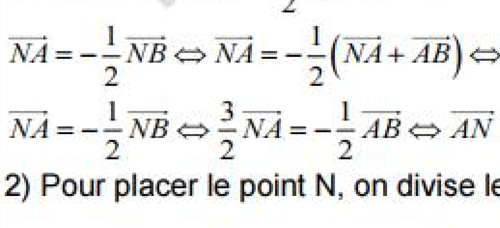
1er BAC Sciences Expérimentales BIOF
1er BAC Sciences Mathématiques BIOF
Correction série N°3 : *BARYCENTRE*

Exercice01 : B est le milieu de [AC].
Démontrer que le barycentre de (A, 1) ; (C, 3) est confondu avec celui de (B, 2) (C, 2)
Solution : Montrons que : $bar\{(A,1);(C,3)\}=bar\{(C,2);(B,2)\}$
Soit G est le barycentre de (A, 1) et (C, 3) alors : $\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GC}=\vec{0}$
$\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{GA}+3\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{AC}=\vec{0}\Leftrightarrow4\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$
$\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ (*).
Soit H est le barycentre de (B, 2) ; (C, 2) alors : $2\overrightarrow{HB}+2\overrightarrow{HC}=\vec{0}$ (H est le milieu de [BC]).
$2\overrightarrow{HB}+2\overrightarrow{HC}=\vec{0}\Leftrightarrow2\left(\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{AB}\right)+2\left(\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow4\overrightarrow{HA}+2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=\vec{0}\Leftrightarrow4\overrightarrow{HA}+2\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AC}=\vec{0}$
$\Leftrightarrow4\overrightarrow{HA}+3\overrightarrow{AC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AH}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ (**)
Et comme : $\overrightarrow{AG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AH}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ alors : $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AH}$ donc : G=H
Autre solution :
Comme H est le barycentre de (B, 2) (C, 2), alors H est le milieu de [BC], donc : $\overrightarrow{BH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$
Comme G est le barycentre de (A, 1) et (C, 3) alors : $\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GC}=\vec{0}$
$\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BA}+3\left(\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BC}\right)=\vec{0}$
Donc : $4\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{BC}+\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}\right)=\vec{0}$ et puisque : $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}$ car B est le milieu de [AC].
Alors : $4\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{BC}=\vec{0}$
Donc : $\overrightarrow{BG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ et on a : $\overrightarrow{BH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$
Donc : $\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{BH}$: les points G et H sont confondus

Exercice02 : A et B sont deux points distincts. N est le point défini par la relation : $\overrightarrow{NA}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{NB}$
1) Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires.
2) Placer le point N sur une figure.
3) Exprimer N comme barycentre des points A et B
Solution :1) $\overrightarrow{NA}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{NB}$ et $A\neq B$
$\overrightarrow{NA}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{NB}\Leftrightarrow\overrightarrow{NA}=-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{AB}\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{NA}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{NA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\overrightarrow{NA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{NA}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{NA}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{NB}\Leftrightarrow\frac{3}{2}\overrightarrow{NA}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$
2) Pour placer le point N, on divise le segment [AB] en trois parties égales et on place N...

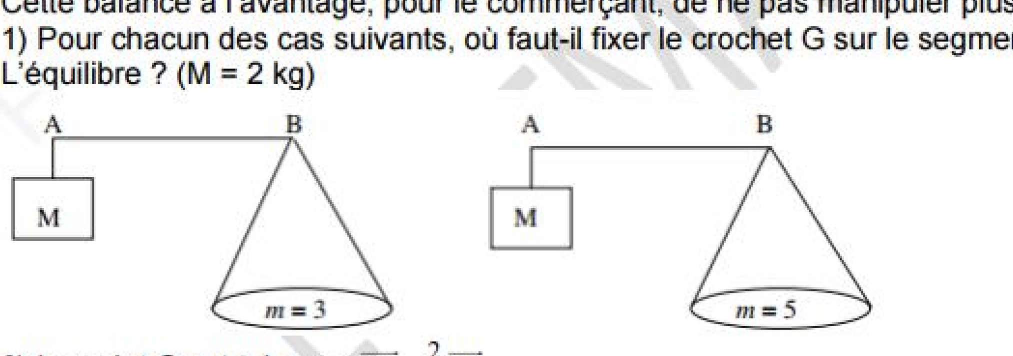


3) Comme : $\overrightarrow{NA}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{NB}$ alors : $1\overrightarrow{NA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{NB}=\vec{0}$
Donc : N est le barycentre de (A, 1) et (B ; $\frac{1}{2}$)
Ou encore : $2\overrightarrow{NA}=-\overrightarrow{NB}$ c'est-à-dire : $2\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}=\vec{0}$
Alors N est aussi le barycentre de (A, 2) et (B, 1)

Exercice03 : Soit ABC un triangle et G un point vérifiant : $\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}-3\overrightarrow{GC}=\vec{0}$
Le point G est-il barycentre des points pondérés (A, 5), (B, 1) et (C, 3) ? Justifier
Solution : $\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}-3\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}-4\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}-3\overrightarrow{GC}=\vec{0}$
Ainsi : $-5\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}-3\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Leftrightarrow5\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+3\overrightarrow{GC}=\vec{0}$
Donc :G le barycentre de (A, 5), (B, 1) et (C, 3).

Exercice04 : On considère un triangle ABC et l'on désigne par G le barycentre de :
(A, 1), (B, 4) et (C, – 3).
1) Construire le barycentre I de (B, 4) et (C, – 3).
2) Démontrer que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GI}=\vec{0}$. En déduire la position de G sur (AI)
Solution : 1) I est le barycentre des points (B, 4) et (C, – 3)
Donc : $4\overrightarrow{IB}-3\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow4\overrightarrow{IB}-3\left(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BC}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{IB}-3\overrightarrow{BC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{BI}=3\overrightarrow{CB}$
Cette relation permet de construire le point I sans problème.
2) G est le barycentre des points (A, 1), (B, 4) et (C, – 3) donc par associativité du barycentre G est aussi barycentre des points (A, 1) et (I, 1). Cela entraîne que : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GI}=\vec{0}$
Autrement dit, G est le milieu de [AI]

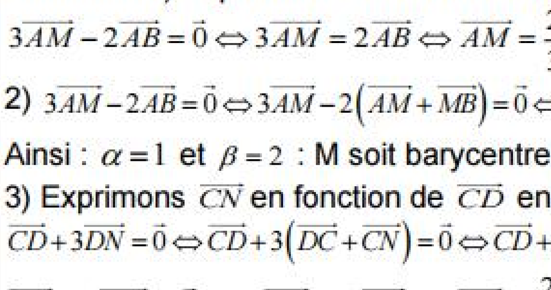
Exercice05 : Une balance est constituée d'une masse M et d'un plateau fixé à l'extrémité d'une tige. Pour peser une masse m, le vendeur place, à une position précise, un crochet sur la tige. Cette balance a l'avantage, pour le commerçant, de ne pas manipuler plusieurs masses.
1) Pour chacun des cas suivants, où faut-il fixer le crochet G sur le segment [AB] pour réaliser L'équilibre ? (M = 2 kg)



2) Le point G est tel que : $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$
Qu'elle est la masse m pesée ? (Données : M = 2 kg)
Solution : D'après le principe des leviers : $M\overrightarrow{GB}+m\overrightarrow{GA}=\vec{0}$ donc : $\overrightarrow{AG}=\frac{m}{m+M}\overrightarrow{AB}$
Donc : $2\overrightarrow{GB}+3\overrightarrow{GA}=\vec{0}$ puis : $\overrightarrow{AG}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$ (situation 1, m = 3 et M = 2)
Donc : $2\overrightarrow{GB}+5\overrightarrow{GA}=\vec{0}$ puis : $\overrightarrow{AG}=\frac{5}{7}\overrightarrow{AB}$ (situation 2, m = 5 et M = 2)
2) Le point G est tel que $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$. Quelle est la masse m pesée ? (Données : M = 2 kg
$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}\right)\Leftrightarrow3\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{AG}+2\overrightarrow{GB}\Leftrightarrow\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}=\vec{0}\Leftrightarrow2\overrightarrow{GA}+4\overrightarrow{GB}=\vec{0}$
D'après le principe des leviers ($M\overrightarrow{GB}+m\overrightarrow{GA}=\vec{0}$)on a donc m = 4

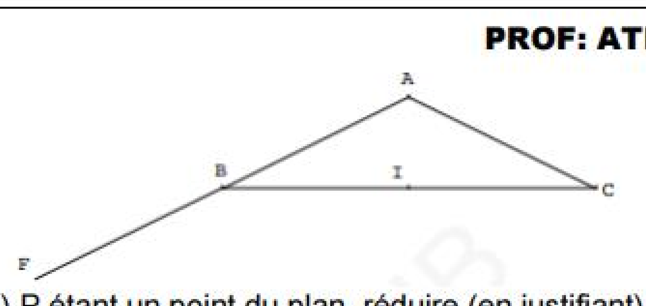
Exercice06 : ABCD est un parallélogramme de centre O. Les points M et N sont tels que :
$3\overrightarrow{AM}-2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ (1) et $\overrightarrow{CD}+3\overrightarrow{DN}=\vec{0}$ (2)
1) Exprimer $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ en utilisant (1). Placer M.

2) Trouver les réels α et β pour que M soit barycentre des points pondérés (A, α) et (B, β).
3) Exprimer $\overrightarrow{CN}$ en fonction de $\overrightarrow{CD}$ en utilisant (2). Placer N.
4) Trouver les réels α' et β' pour que N soit barycentre des points pondérés (C, α') et (D, β').
5) Justifier que le quadrilatère NCMA est un parallélogramme et que O est le milieu de [MN].
Solution :1) Exprimons $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ en utilisant (1).
$3\overrightarrow{AM}-2\overrightarrow{AB}=\vec{0}\Leftrightarrow3\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ ce qui permet de placer M
2) $3\overrightarrow{AM}-2\overrightarrow{AB}=\vec{0}\Leftrightarrow3\overrightarrow{AM}-2\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow3\overrightarrow{AM}-2\overrightarrow{AM}-2\overrightarrow{MB}=\vec{0}\Leftrightarrow-\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=\vec{0}$
Ainsi : $\alpha=1$ et $\beta=2$: M soit barycentre des points pondérés (A, 1) et (B, 2).
3) Exprimons $\overrightarrow{CN}$ en fonction de $\overrightarrow{CD}$ en utilisant (2) :
$\overrightarrow{CD}+3\overrightarrow{DN}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{CD}+3\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CN}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{CD}+3\overrightarrow{DC}+3\overrightarrow{CN}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{CD}-3\overrightarrow{CD}+3\overrightarrow{CN}=\vec{0}\Leftrightarrow-2\overrightarrow{CD}+3\overrightarrow{CN}=\vec{0}$
$\overrightarrow{CD}+3\overrightarrow{DN}=\vec{0}\Leftrightarrow3\overrightarrow{CN}=2\overrightarrow{CD}\Leftrightarrow\overrightarrow{CN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$
4) Comme : $\overrightarrow{CD}+3\overrightarrow{DN}=\vec{0}$ alors : $\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{ND}+3\overrightarrow{DN}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{CN}-\overrightarrow{DN}+3\overrightarrow{DN}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{CN}+2\overrightarrow{DN}=\vec{0}$
Alors : $\overrightarrow{NC}+2\overrightarrow{ND}=\vec{0}$
Ainsi : $\alpha'=1$ et $\beta'=2$: N soit barycentre des points pondérés (C, 1) et (D, 2).



5) Justifions que le quadrilatère NCMA est un parallélogramme et que O est le milieu de [MN].
On a : $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$ et puisque : ABCD est un parallélogramme alors : $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{DC}$
Alors : $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{NC}$
Comme : $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{NC}$ alors NCMA est un parallélogramme. Les diagonales [MN] et [AC] ont le même milieu. Comme O est le milieu de [AC] alors O est aussi le milieu de [MN].

Exercice07 : Soit ABC un triangle isocèle en A tel que BC = 8 cm et BA = 5 cm.
Soit I le milieu de [BC].
1) Placer le point F tel que $\overrightarrow{BF}=-\overrightarrow{BA}$ et montrer que F est le barycentre des points A et B pondérés par des réels que l'on déterminera
2) P étant un point du plan, réduire (en justifiant) chacune des sommes suivantes :
a) $\frac{1}{2}\overrightarrow{PB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{PC}$ b) $-\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}$ c) $2\overrightarrow{PB}-2\overrightarrow{PA}$
3) Déterminer et représenter l'ensemble des points M du plan vérifiant :
$\left\|\frac{1}{2}\overrightarrow{MB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\|$
4) Déterminer et représenter l'ensemble des points N du plan vérifiant :
$\left\|\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{NB}-2\overrightarrow{NA}\right\|$
Solution : 1) Comme : $\overrightarrow{BF}=-\overrightarrow{BA}$ ou $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AB}$; B est le milieu de [AF].
Donc : $\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FA}=\vec{0}\Leftrightarrow2\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FA}=\vec{0}\Leftrightarrow2\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{AF}=\vec{0}$
On en déduit que : F barycentre des points pondérés (A, -1) et (B, 2).



2) P étant un point du plan, réduire (en justifiant) chacune des sommes suivantes :
a) $\frac{1}{2}\overrightarrow{PB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{PC}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{PI}$ (identité du parallélogramme).
b) $-\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PF}$ car : F barycentre des points pondérés (A, -1) et (B, 2).
c) $2\overrightarrow{PB}-2\overrightarrow{PA}=2\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{AP}=2\left(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{AP}\right)=2\overrightarrow{AB}$
3) Déterminons l'ensemble des points M du plan vérifiant : $\left\|\frac{1}{2}\overrightarrow{MB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\|$
$\left\|\frac{1}{2}\overrightarrow{MB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\|\Leftrightarrow\left\|\overrightarrow{MI}\right\|=\left\|\overrightarrow{MF}\right\|$ (D'après ce qui précède).
L'ensemble des points M vérifiant cette relation est donc la médiatrice de [IF]
4) Déterminons l'ensemble des points N du plan vérifiant : $\left\|\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{NB}-2\overrightarrow{NA}\right\|$
$\left\|\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{NB}-2\overrightarrow{NA}\right\|\Leftrightarrow\left\|2\overrightarrow{NI}\right\|=\left\|2\overrightarrow{AB}\right\|$: d'après la question 2
$\left\|\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{NB}-2\overrightarrow{NA}\right\|\Leftrightarrow NI=AB$
L'ensemble des points M est le cercle de centre I et de rayon AB.

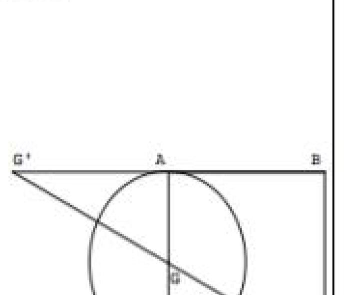
Exercice08 :ABC est un triangle, A' est le milieu de [BC]. On se propose de démontrer la propriété : « G est le centre de gravité du triangle ABC » équivaut à « $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ ».
1) Quelle égalité vectorielle entre $\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{GA'}$ caractérise le centre de gravité G ?
2) a) Prouver que : $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GA'}$
b) En déduire la propriété énoncée au début de l'exercice.
3) a) Quelle interprétation cette propriété peut-on donner en physique ?
b) Traduire l'égalité $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ en termes de barycentre
Solution : 1) L'égalité vectorielle $2\overrightarrow{GA'}=-\overrightarrow{GA}$ caractérise le centre de gravité G.
2) a) Prouvons que : $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GA'}$
$\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{A'C}=2\overrightarrow{GA'}+\left(\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{A'C}\right)=2\overrightarrow{GA'}+\left(\vec{0}\right)=2\overrightarrow{GA'}$
b) On en déduit la propriété énoncée au début de l'exercice :
$\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GA'}$ $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GA'}\Leftrightarrow\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=-\overrightarrow{GA}\Leftrightarrow\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$
3) a) Un triangle est tenu en équilibre sur une pointe à condition que celle-ci soit au centre de gravité
$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Leftrightarrow$ G est l'isobarycentre des points A, B, C
$\Leftrightarrow$ G est barycentre des points (A, 1) (B, 1) (C, 1)

Exercice09: Soit ABCD un carré et K le barycentre des points pondérés :
(A, 2), (B, – 1), (C, 2) et (D, 1).
On note I le barycentre des points pondérés (A, 2), (B, – 1) et J celui de (C, 2) et (D, 1).
1) Placer I et J en justifiant
2) Réduire l'écriture des vecteurs suivants : $2\overrightarrow{KA}-\overrightarrow{KB}$ et $2\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KD}$
En déduire que K est le barycentre de (I, 1) et (J, 3).
3) Placer K en justifiant
Solution : 1) I est le barycentre des points pondérés (A, 2), (B, – 1)
$2\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}=\vec{0}\Leftrightarrow2\overrightarrow{IA}-\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow2\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{AB}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{AB}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AI}$

Ce qui permet de placer le point I (A est le milieu de [IB]).
J est le barycentre des points pondérés (C, 2) et (D, 1)
$2\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{JD}=\vec{0}\Leftrightarrow2\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}\Leftrightarrow3\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{CJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$:Ce qui permet de placer le point J.
2) Réduisons l'écriture des vecteurs suivants : $2\overrightarrow{KA}-\overrightarrow{KB}$ et $2\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KD}$
$2\overrightarrow{KA}-\overrightarrow{KB}=\overrightarrow{KI}$:car I est le barycentre des points pondérés (A, 2), (B, – 1).
$2\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KD}=3\overrightarrow{KJ}$ car J est le barycentre des points pondérés (C, 2) et (D, 1)
Comme K est le barycentre des points pondérés (A, 2), (B, – 1), (C, 2) (D, 1) alors
$2\overrightarrow{KA}-\overrightarrow{KB}+2\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KD}=\overrightarrow{KI}+3\overrightarrow{KJ}=\vec{0}$
Ainsi K est le barycentre de (I, 1) et (J, 3).
3) Pour construire le point K, on place d'abord I
(Sachant que I est le symétrique de B par rapport à A)
Puis on place J (sachant que $\overrightarrow{CJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$). Pour finir on utilise :
$\overrightarrow{KI}+3\overrightarrow{KJ}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{KI}+3\left(\overrightarrow{KI}+\overrightarrow{IJ}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow4\overrightarrow{KI}+3\overrightarrow{IJ}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{IK}=\frac{3}{4}\overrightarrow{IJ}$ ce qui permet de placer le point K
La méthode est à retenir : Pour placer le barycentre de 4 points (A, α), (B, β), (C, γ) (D, δ) :
On construit d'abord I le barycentre de (A, α) ; (B, β) et J le barycentre de (C, γ) ;(D, δ).
Puis on construit K le barycentre de (I, α + β) et (J, γ + δ)

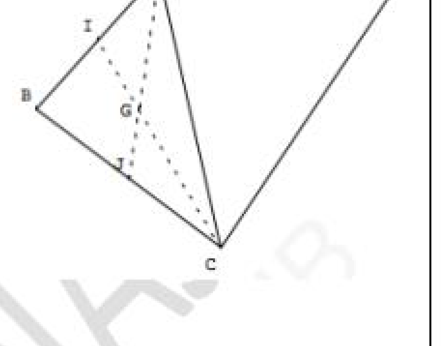
Exercice10 :ABC est un triangle. On considère le barycentre A' de (B, 2) et (C, – 3), le barycentre B' de (A, 5) et (C, – 3) ainsi que le barycentre C' de (A, 5) et (B, 2).
Démontrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.
Indication : on pourra considérer le barycentre G de (A, 5), (B, 2) et (C, – 3).
Solution : a) Considérons G le barycentre des points (A, 5), (B, 2) et (C, – 3).
Comme A' est le barycentre des points (B, 2) et (C, – 3), par associativité du barycentre, G est aussi le barycentre des points (A, 5) et (A', – 1).
Ceci prouve que : les points A, G et A' sont alignés.
b) G est le barycentre des points (A, 5), (B, 2) et (C, – 3).
Comme B' est le barycentre des points (A, 5) et (C, – 3), par associativité du barycentre, G est aussi le barycentre des points (B', 2) et (B, 2).
Ceci prouve que : les points B, G et B' sont alignés.
c) G est le barycentre des points (A, 5), (B, 2) et (C, – 3).
Comme C est : le barycentre des points (A, 5) et (B, 2), par associativité du barycentre, G est aussi le barycentre des points (C', 7) et (C, – 3).
Ceci prouve que : les points B, G et B' sont alignés. Donc les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.

Exercice11 : ABCD est un carré.
1) Quel est l'ensemble (E) des points M du plan tels que : $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=AB$?
2) Représenter cet ensemble (E)
Solution :1) Notons : G le barycentre de (A, 2), (B, -1) et (C, 1).
On a, pour tout point M du plan : $2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MG}$
$\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=AB\Leftrightarrow\left\|2\overrightarrow{MG}\right\|=AB\Leftrightarrow2MG=AB\Leftrightarrow MG=\frac{1}{2}AB$

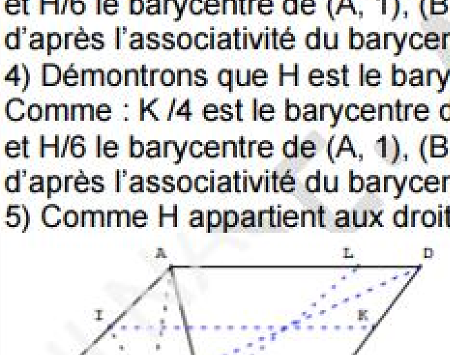


L'ensemble (E)des points M du plan tels que $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=AB$ est donc le cercle de centre G et de rayon : $\frac{1}{2}AB$
2) Représentons cet ensemble (E) : Pour construire G, on commence par construire G' le barycentre des points (A, 2) et (B, – 1). Puis par associativité du barycentre, G est le barycentre des points :
(G', 1) et (C, 1) donc le milieu de [CG'].

Exercice12 : ABCD est un quadrilatère.
G est le centre de gravité du triangle ABC.
I et J sont les milieux respectifs de [AB] et [BC].
L est le barycentre de (A, 1) et (D, 3).
K est le barycentre de (C, 1) et (D, 3).
Le but de l'exercice est de démontrer que : les droites (IK), (JL) et (DG) sont concourantes.
Pour cela, on utilise le barycentre H de (A, 1), (B, 1), (C, 1) et (D, 3).
1) Placer en justifiant, les points L et K.
2) Démontrer que H est le barycentre de G et D munis de coefficients que l'on précisera.
3) Démontrer que H est le barycentre de J et L munis de coefficients que l'on précisera.
4) Démontrer que H est le barycentre de I et K munis de coefficients que l'on précisera.
5) Conclure



Solution :1) Plaçons en justifiant, les points L et K
Il suffit de voir que : $\overrightarrow{AL}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CK}=\frac{3}{4}\overrightarrow{CD}$
2) Démontrons que H est le barycentre de G et D munis de coefficients que l'on précisera.
Comme :G est la centre de gravité du triangle ABC
Alors : G /3 est le barycentre de (A, 1), (B, 1), (C, 1)
Comme G /3 est le barycentre de (A, 1), (B, 1), (C, 1)
et H/6 le barycentre de (A, 1), (B, 1), (C, 1) et (D, 3).
Alors : H /6 est le barycentre de (G, 3), (D, 3) D'après l'associativité du barycentre.
Donc H est le milieu de [GD]
3) Démontrons que H est le barycentre de J et L munis de coefficients que l'on précisera.
Comme : L /4 est le barycentre de (A, 1), (D, 3) et J /2 est le barycentre de (B, 1), (C, 1)
et H/6 le barycentre de (A, 1), (B, 1), (C, 1) et (D, 3) alors : H/6 le barycentre de (L, 4), (J, 2)
d'après l'associativité du barycentre. Donc H $\in$ (JL).
4) Démontrons que H est le barycentre de I et K munis de coefficients que l'on précisera.
Comme : K /4 est le barycentre de (C, 1), (D, 3) et I/2 est le barycentre de (A, 1), (B 1)
et H/6 le barycentre de (A, 1), (B, 1), (C, 1) et (D, 3) alors : H/6 le barycentre de (K, 4), (I, 2)
d'après l'associativité du barycentre. Donc H $\in$ (IK).
5) Comme H appartient aux droites (IK), (JL) et (DG) alors elles sont concourantes en H



C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien