Exercice 01

Soient A et B deux points , déterminer a et b tel que G est le barycentre de (A,a) *et* (B,b) défini par la condition indiqué :

1) $2\,\overrightarrow{GA} - 3\,\overrightarrow{BG} = \vec{0}$; 2) $2\,\overrightarrow{AB} + 3\,\overrightarrow{BG} = \vec{0}$

Solution de l'exercice 01

1) $2\,\overrightarrow{GA} - 3\,\overrightarrow{BG} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\,\overrightarrow{GA} + 3\,\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

$Donc\ ;\ \ G = bary\{(A,2);(B,3)\}$

2) $2\,\overrightarrow{AB} + 3\,\overrightarrow{BG} = \vec{0} \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB}) + 3\,\overrightarrow{BG} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\,\overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{GB} + 3\,\overrightarrow{BG} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\,\overrightarrow{AG} - 2\overrightarrow{BG} + 3\,\overrightarrow{BG} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\,\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} = \vec{0}$

$Donc\ ;\ \ G = bary\{(A,2);(B,1)\}$

Exercice 02

Soit G le barycentre de $(A,1)\ et (B,-2)$

1) Montrer que A est le barycentre de $(G,1)\ et\ (B,-2)$

2) Montrer que B est le milieu de $[AG]$

Solution de l'exercice 02

1) $G = bary\{(A,1);(B,-2)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} - 2(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{AB} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow -\overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{AG} - 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} - 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow\ A = bary\{(G,1);(B,-2)\}$

2) Montrer que B est le milieu de $[AG]$

$G = bary\{(A,1);(B,-2)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{GB} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow -\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{BA} = \vec{0} \qquad \Leftrightarrow$ B est le milieu de $[AG]$

Exercice 03

Soient A et B deux points

1) Construire $G = bary\{(A,-1);(B,3)\}$

2) Construire $G' = bary\{(A,3);(B,-2);\}$

3) Déterminer $\overrightarrow{GG'}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$

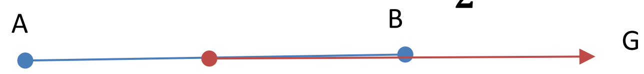
Solution de l'exercice 03

Soient A et B deux points

1) Construire $G = bary\{(A,-1);(B,3)\}$

$G = bary\{(A,-1);(B,3)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \dfrac{b}{(a+b)}\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}$



2) Construire $G' = bary\{(A,3);(B,-2);\}$

$G' = bary\{(A,3);(B,-2)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG'} = \dfrac{b}{(a+b)}\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG'} = \dfrac{-2}{1}\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG'} = -2\overrightarrow{AB}$

3) Déterminer $\overrightarrow{GG'}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AG'} = -\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AB} = \left(-\dfrac{3}{2} - 2\right)\overrightarrow{AB} = -\dfrac{7}{4}\overrightarrow{AB}$

$Donc:\ \ \overrightarrow{GG'} = -\dfrac{7}{4}\overrightarrow{AB}$

Exercice 04

Soient A et B deux points

Déterminer l'ensemble des points M tel que :

1) $\left\|2\,\overrightarrow{MA}+3\,\overrightarrow{MB}\right\|=10$

2) $\left\|2\,\overrightarrow{MA}+3\,\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|5\overrightarrow{MA}-10\,\overrightarrow{MB}\right\|$

Solution de l'exercice 04

Déterminer l'ensemble des points M tel que :

1) $\left\|2\,\overrightarrow{MA}+3\,\overrightarrow{MB}\right\|=10$

Soient A et B deux points

Considérons $G=\text{bary}\{(A,2)\,;(B,3)\}$

Donc pour tous points M du plan on a : $2\,\overrightarrow{MA}+3\,\overrightarrow{MB}=5\overrightarrow{MG}$

$$\left\|2\,\overrightarrow{MA}+3\,\overrightarrow{MB}\right\|=10\Leftrightarrow\left\|5\overrightarrow{MG}\right\|=10$$
$$\Leftrightarrow 5MG=10$$
$$\Leftrightarrow MG=2$$

Donc l'ensemble des points M de plan tel que $MG=2$ **est le cercle (C) de centre G et de rayon 2**

2) $\left\|2\,\overrightarrow{MA}+3\,\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|5\overrightarrow{MA}-10\,\overrightarrow{MB}\right\|$

Considérons $G=\text{bary}\{(A,2)\,;(B,3)\}$

Donc pour tous points M du plan on a : $2\,\overrightarrow{MA}+3\,\overrightarrow{MB}=5\overrightarrow{MG}$

Et considérons $G'=\text{bary}\{(A,5)\,;(B,-10)\}$

Donc pour tous points M on a : $5\,\overrightarrow{MA}-10\,\overrightarrow{MB}=-5\overrightarrow{MG'}$

$$\left\|2\,\overrightarrow{MA}+3\,\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|5\overrightarrow{MA}-10\,\overrightarrow{MB}\right\|\Leftrightarrow\left\|5\overrightarrow{MG}\right\|=\left\|-5\overrightarrow{MG'}\right\|$$
$$\Leftrightarrow 5MG=5MG'$$
$$\Leftrightarrow MG=MG'$$

Donc l'ensemble des points M de plan tel que $MG=MG'$ **est la droite (D) la médiatrice du segment [AB]**

Solution de l'exercice 05

$$x_G=\frac{a\,x_A+b\,x_B}{(a+b)}=\frac{4\times 1-2\times -1}{(4-2)}=\frac{6}{2}=3$$

$$y_G=\frac{a\,y_A+b\,y_B}{(a+b)}=\frac{4\times 2-2\times 2}{(4-2)}=\frac{4}{2}=2$$

Exercice 06

Soient ABC triangle :

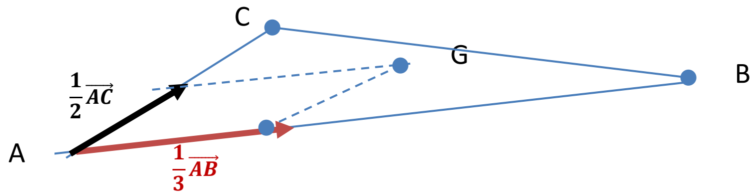
Construire $G=\boldsymbol{bary}\{(A,1)\,;(B,2);(C;3)\}$ **avec deux méthodes différentes**

Solution de l'exercice 06

Construire $G=\boldsymbol{bary}\{(A,1)\,;(B,2);(C;3)\}$

1ère méthode : (Méthode de parallélogramme)

$$G=\boldsymbol{bary}\{(A,1)\,;(B,2);(C;3)\}\Leftrightarrow\overrightarrow{AG}=\frac{b}{(a+b+c)}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{(a+b+c)}\overrightarrow{AC}$$
$$\Leftrightarrow\overrightarrow{AG}=\frac{2}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{6}\overrightarrow{AC}$$
$$\Leftrightarrow\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$



2ème méthode : (Associativité du barycentre)

$G=\boldsymbol{bary}\{(A,1)\,;(B,2);(C;3)\}$

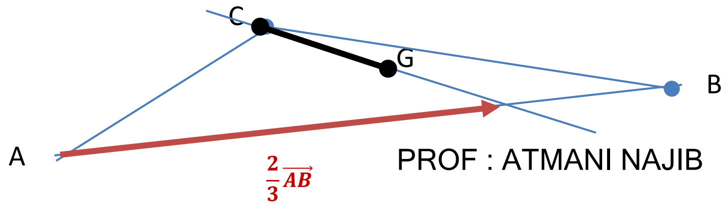
Considérons $H=\boldsymbol{bary}\{(A,1);(B,2)\}$

$$H=\boldsymbol{bary}\{(A,1)\,;(B,2)\}\Leftrightarrow\overrightarrow{AH}=\frac{b}{(a+b)}\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\overrightarrow{AH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$

ET d'après l'associativité de barycentre on a :

$G=\boldsymbol{bary}\{(H,a+b)\,;(C,c)\}$. **Donc :** $G=\boldsymbol{bary}\{(H,3);(C,3)\}$

Donc G est le milieu du segment [HC]



Exercice 07

ABC un triangle et $G = bary\{(A,1);(B,2);(C,3)\}$

On considère $E = bary\{(A,1);(B,2)\}$ et

$F = bary\{(A,1);(C,3)\}$ et $K = bary\{(B,2);(C,3)\}$

1) Montrer que G est le milieu du segment $[CE]$

2) Montrer que $G \in (BF)$

3)Montrer que $G \in (AK)$

4)Déduire que les droites (CE) , (BF) et (AK) sont concourantes en G

Solution de l'exercice 07

1) Montrer que G est le milieu du segment $[CE]$

On a : $G = bary\{(A,1);(B,2);(C,3)\}$

Et on a : $E = bary\{(A,1);(B,2)\}$

Donc d'après l'associativité de barycentre on a :

$G = bary\{(E,1+2);(C,3)\}$

Donc : $G = bary\{(E,3);(C,3)\}$

Donc G est le milieu du segment $[CE]$

2) Montrer que $G \in (BF)$

On a : $G = bary\{(A,1);(B,2);(C,3)\}$

Et on a : $F = bary\{(A,1);(C,3)\}$

Donc d'après l'associativité de barycentre on a :

$G = bary\{(F,1+3);(B,2)\}$

Donc : $G = bary\{(F,4);(B,2)\}$. Donc $G \in (BF)$

3)Montrer que $G \in (AK)$

On a : $G = bary\{(A,1);(B,2);(C,3)\}$

Et on a : $K = bary\{(B,2);(C,3)\}$

Donc d'après l'associativité de barycentre on a :

$G = bary\{(K,2+3);(A,1)\}$

Donc : $G = bary\{(K,5);(A,1)\}$. Donc $G \in (AK)$

4) Déduire que les droites (CE) , (BF) et (AK) sont concourantes en G

On a : G est le milieu du segment $[CE]$ donc $G \in (CE)$

Et on a $G \in (BF)$ et $G \in (AK)$

Donc les droites (CE) , (BF) et (AK) sont concourantes en G

Exercice 08

ABCD un carré et $G = bary\{(A,2);(B,-1);(C,2);(D;1)\}$

Soient $I = bary\{(A,2);(B,-1)\}$ et $J = bary\{(C,2);(D;1)\}$;

1)Montrer que : $2\,\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GI}$ et $2\,\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 3\overrightarrow{GJ}$

2) En déduire que $G = bary\{(I,1);(J,3)\}$

3) Construire J et J puis K

Solution de l'exercice 08

1)Montrer que : $2\,\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{KI}$ et $2\,\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 3\overrightarrow{GJ}$

On a : $I = bary\{(A,2);(B,-1)\}$

Donc d'après la propriété caractéristique on a :

Pour tous points M on a : $2\,\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI}$

On remplace M par G on trouve : $2\,\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GI}$

On a : $J = bary\{(C,2);(D;1)\}$

Donc d'après la propriété caractéristique on a :

Pour tous points M on a : $2\,\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 3\,\overrightarrow{MJ}$

On remplace M par G on trouve : $2\,\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 3\,\overrightarrow{GJ}$

2) En déduire que $G = bary\{(I,1);(J,3)\}$

On a : $G = bary\{(A,2);(B,-1);(C,2);(D;1)\}$

Donc $2\,\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + 2\,\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

Et on a : $2\,\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GI}$ et $2\,\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 3\overrightarrow{GJ}$

Donc $\overrightarrow{GI} + 3\overrightarrow{GJ} = 2\,\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + 2\,\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}$

Donc $\overrightarrow{GI} + 3\overrightarrow{GJ} = \vec{0}$

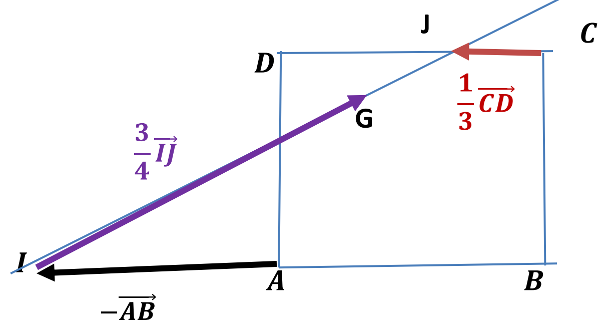
. *Donc :* $G = bary\{(I,1);(C,3)\}$

3) Construire J et J puis K

$I = bary\{(A,2);(B,-1)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \dfrac{-1}{(2-1)}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = -\overrightarrow{AB}$

$J = bary\{(C,2);(D;1)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{CJ} = \dfrac{1}{(2+1)}\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{CJ} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{CD}$

$G = bary\{(I,1);(J,3)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{IG} = \dfrac{3}{(1+3)}\overrightarrow{IJ} \Leftrightarrow \overrightarrow{IG} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{IJ}$



Exercice 09

ABC un triangle. On considère les points E ; F tels que :

$\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB}$ et F est le milieu du segment $[AC]$.

1) Montrer que $E = bary\{(A,-1);(B,2)\}$

2) Soit $G = bary\{(A;-1);(B,2);(C,1)\}$

Montrer que G est le milieu de segment $[CE]$

3) Soit $K = bary\{(B,2);(C,1)\}$

Montrer que les points A, K et G sont alignés

4) Déterminer (φ) l'ensemble des points M qui vérifie

$\left\|-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = CE$

Solution de l'exercice 09

ABC un triangle. On considère les points E ; F tels que :

$\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB}$ et F est le milieu du segment $[AC]$.

1) Montrer que $E = bary\{(A,-1);(B,2)\}$

1) $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AE} - 2\left(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB}\right) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow -\overrightarrow{AE} + 2\overrightarrow{BE} = \vec{0}$

Donc ; $E = bary\{(A,-1);(B,2)\}$

2) Soit $G = bary\{(A;-1);(B,2);(C,1)\}$

Montrer que G est le milieu de segment $[CE]$

On a : $G = bary\{(A;-1);(B,2);(C,1)\}$

Et on a : $E = bary\{(A,-1);(B,2)\}$

Donc d'après l'associativité de barycentre on a :

$G = bary\{(E,1);(C,1)\}$

Donc G est le milieu du segment $[CE]$

3) Soit $K = bary\{(B,2);(C,1)\}$

Montrer que les points A, K et G sont alignés

On a : $G = bary\{(A;-1);(B,2);(C,1)\}$

Et on a : $K = bary\{(B,2);(C,1)\}$

Donc d'après l'associativité de barycentre on a :

$G = bary\{(A,-1);(K,4)\}$

Donc les points A, K et G sont alignés

4) On a : $G = bary\{(A;-1);(B,2);(C,1)\}$

Donc pour tous points M du plan on a :

$$-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MG}$$

$\left\|-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = CE \Leftrightarrow \left\|2\overrightarrow{MG}\right\| = CE$

$$\Leftrightarrow 2MG = CE$$

$$\Leftrightarrow MG = \frac{CE}{2}$$

Donc l'ensemble des points M de plan est le cercle (C) de centre G et de rayon $\frac{CE}{2}$