1er BAC Sciences Expérimentales BIOF

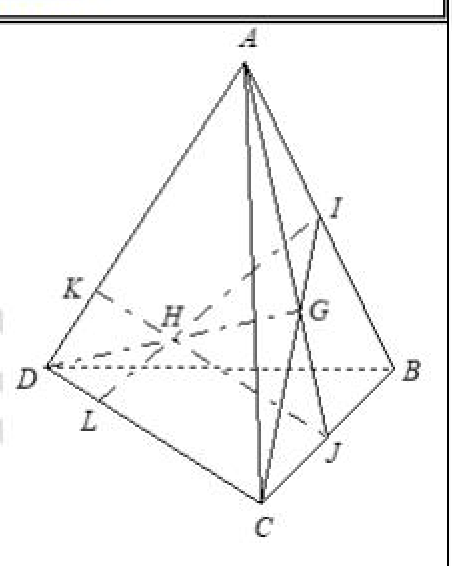
1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Série N°10 : BARYCENTRE dans l'espace

(La correction voir😊 http://www.xriadiat.com)

Exercice01 : Soit *ABCD* un tétraèdre, *I* le milieu de [*AB*], *J* celui de [*BC*], *K* le barycentre de (*A*, 1), (*D*, 3) et *L* celui de (*C*, 1), (*D*, 3).
Les droites (*IC*) et (*AJ*) se coupent en *G*.

Démontrer que les droites (*IL*) et (*JK*) sont sécantes en un point *H*, milieu du segment [*DG*].



Exercice02 : Pour cet exercice, une figure est recommandée.
ABCDE est une pyramide à base carrée BCDE.
Soit G l'isobarycentre de A, B, C, D et E.
On note O le centre du carré BCDE (c'est-à-dire l'intersection des diagonales (CE) et (BD)).
1) Démontrer que O est l'isobarycentre de BCDE.
2) Démontrer que G est le barycentre de (O, 4) et (A, 1).
3) Soit G_1 le centre de gravité du triangle ABE et I le milieu de [CD]. Démontrer que $G \in (G_1 I)$

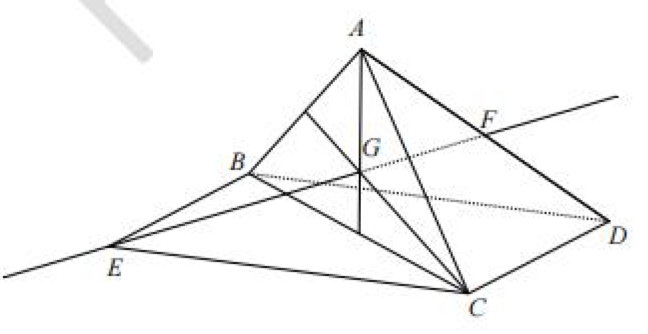
Exercice03 : Pour cet exercice, une figure est recommandée.
ABCD est un tétraèdre et G est le barycentre de (A, 4), (B, 1), (C, 1) et (D, 1).
On note H le centre de gravité du triangle BCD (c'est-à-dire H est l'isobarycentre de B, C, D).
1) Démontrer que G est le barycentre de (H, 3) et (A, 4).
2) Situer le point G sur la droite (AH).

Exercice04 : Dans un tétraèdre *ABCD* on considère *E* le barycentre de (*A*, −1), (B, 2) et (C, −3) ; *F* le milieu de [*ED*], *G* le barycentre de (*A*, 1) et (*D*, 2) et *H* celui de (*B*, 2) et (*C*, −3).
1) Démontrer que *F*, *G* et *H* sont alignés.

2) Démontrer que *B*, *C*, *F* et *G* sont coplanaires.

Exercice05 : *ABCD* est un tétraèdre

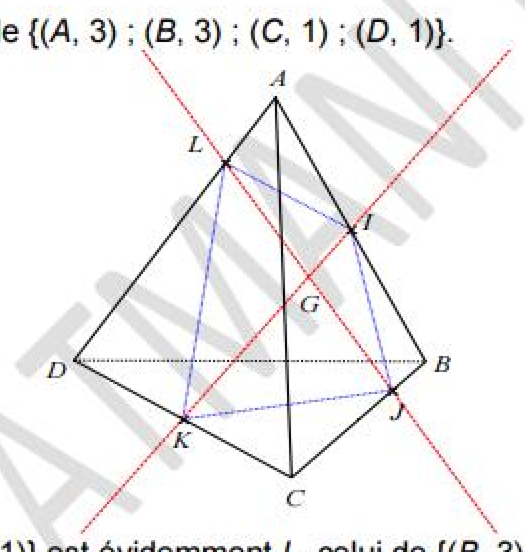
F est le milieu de [*AD*], *G* est le centre de gravité de *ABC*, *E* est le point du plan *BCD* tel que *BDCE* est un parallélogramme.
1) Vérifier que *D* est le barycentre de (*B*, 1), (*C*, 1) et (*E*, −1).
2) Démontrer l'alignement de *E*, *F* et *G*.



Exercice06 : *ABCD* est un tétraèdre. On définit les points *I*, *J*, *K* et *L* par : $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{DL}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DA}$. Soient *M* le milieu de [*AC*] et *N* celui de [*BD*].
1) Démontrer que les droites (*IK*), (*JL*) et (*MN*) sont concourantes en un point *G* que l'on déterminera.
2) Soit *P* le milieu de [*CN*]. Démontrer que la droite (*AP*) passe par *G* et préciser la position de *G* sur [*AP*].
3) La droite (*BG*) coupe la face *ACD* en *Q*. Démontrer que *Q* est sur le segment [*DM*] et préciser sa position.

Exercice07 : Dans l'espace, on considère un tétraèdre *ABCD*. Soit *I* le milieu du segment [*AB*] et *K* celui du segment [*CD*]. Soit *L* le point défini par $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ et *J* celui défini par $\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.
Soit *G* le barycentre de {(*A*, 3) ; (*B*, 3) ; (*C*, 1) ; (*D*, 1)}.
1) Déterminer le barycentre de{(*A*, 3) ; (*D*, 1)} puis celui de {(*B*, 3) ; (*C*, 1)}.
2) En associant les points *A*, *B*, *C* et *D* de deux façons différentes, montrer que *G* appartient aux droites (*IK*) et (*JL*).
3) En déduire que *I*, *J*, *K* et *L* sont coplanaires.

Solution : Soit *G* le barycentre de {(*A*, 3) ; (*B*, 3) ; (*C*, 1) ; (*D*, 1)}.



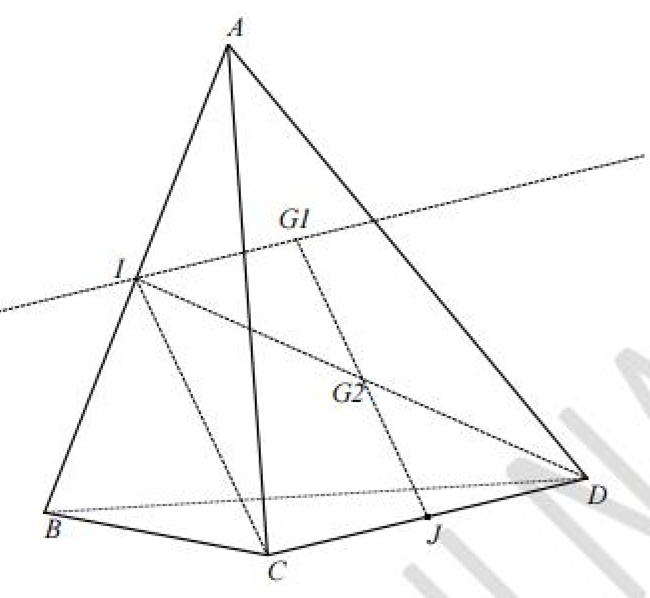
1) Le barycentre de :{(*A*, 3) ; (*D*, 1)} est évidemment *L*, celui de {(*B*, 3) ; (*C*, 1)} est *J*
2) *G* le barycentre de {(*A*, 3) ; (*D*, 1) ; (*B*, 3) ; (*C*, 1)} est donc celui de {(*L*, 4) ; (*J*, 4)} ; il appartient donc à la droite (*LJ*).
G le barycentre de {(*A*, 3) ; (*B*, 3) ; (*D*, 1) ; (*C*, 1)} est donc celui de {(*I*, 6) ; (*K*, 2)} ; il appartient donc à la droite (*LK*).
3) Les droites (*IK*) et (*LJ*) étant sécantes en *G*, elles sont coplanaires ainsi que *I*, *J*, *K* et *L*.

Exercice08 : On considère le tétraèdre *ABCD* ; on note *I* le milieu de [*AB*] et *J* celui de [*CD*].

1) a) Soit G_1 le barycentre du système de points pondérés {(*A*, 1) ; (*B*, 1) ; (*C*, –1) ; (*D*, 1)}.
Exprimez $\overrightarrow{IG_1}$ en fonction de $\overrightarrow{CD}$. Placez *I*, *J* et G_1 sur la figure (voir feuille annexe).
b) Soit G_2 le barycentre du système de points pondérés {(*A*, 1) ; (*B*, 1) ; (*D*, 2)}.
Démontrez que G_2 est le milieu du segment [*ID*]. Placez G_2.
c) Démontrez que IG_1DJ est un parallélogramme.
En déduire la position de G_2 par rapport aux points G_1 et *J*.
2). Soit *m* un réel. On note G_m le barycentre du système de points pondérés
{(*A*, 1) ; (*B*, 1) ; (*C*, *m* – 2) ; (*D*, *m*)}.
a) Précisez l'ensemble *E* des valeurs de *m* pour lesquelles le barycentre G_m existe.
Dans les questions qui suivent, on suppose que le réel *m* appartient à l'ensemble *E*.
b) Démontrez que G_m, appartient au plan (*ICD*)

c) Démontrez que le vecteur $m\,\overrightarrow{JG_m}$ est constant.
d) En déduire l'ensemble *F* des points G_m lorsque *m* décrit l'ensemble *E*.

Correction



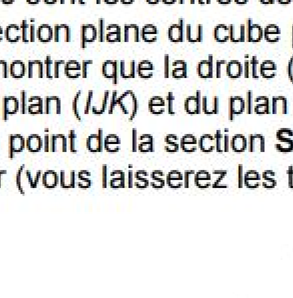
1) a) G_1 est le barycentre de {(*A*, 1) ; (*B*, 1) ; (*C*, –1) ; (*D*, 1)} = {(*I*, 2) ; (*C*, –1) ; (*D*, 1)} donc
$2\overrightarrow{IG_1}-\overrightarrow{CG_1}+\overrightarrow{DG_1}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{IG_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$.
b) G_2 : {(*A*, 1) ; (*B*, 1) ; (*D*, 2)} = {(*I*, 2) ; (*D*, 2)} = milieu de [*ID*].
c) On a $\overrightarrow{IG_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{JD}$ donc IG_1DJ est un parallélogramme. G_2 est au milieu des points G_1 et *J*.
2) G_m barycentre de {(*A*, 1) ; (*B*, 1) ; (*C*, *m* – 2) ; (*D*, *m*)}.
a) G_m existe si la somme des coefficients n'est pas nulle : $1+1+m-2+m=2m$;
m doit être différent de 0.
b) G_m barycentre de {(*A*, 1) ; (*B*, 1) ; (*C*, *m* – 2) ; (*D*, *m*)} = {(*I*, 2) ; (*C*, *m* – 2) ; (*D*, *m*)}. G_m, appartient donc au plan (*ICD*).
c) $2\overrightarrow{IG_m}+(m-2)\overrightarrow{CG_m}+m\overrightarrow{DG_m}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IG_m}-2\overrightarrow{CG_m}+m\overrightarrow{CG_m}+m\overrightarrow{DG_m}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IC}+m\left(2\overrightarrow{JG_m}\right)=\vec{0}$

D'où : on tire que $m\overrightarrow{JG_m}=\overrightarrow{CI}$ et est bien constant.

d) $m\overrightarrow{JG_m}=\overrightarrow{CI}\Leftrightarrow\overrightarrow{JG_m}=\frac{1}{m}\overrightarrow{CI}$

Donc : les points G_m sont sur la droite passant par *J* et de vecteur directeur $\overrightarrow{CI}$.
Comme *m* prend toutes les valeurs réelles sauf 0, 1/*m* également donc G_m parcourt toute la droite sauf *J*.

Exercice09 : Soit *ABCDEFGH* un cube de côté *a* et de centre *O*. Soit *I* le centre du carré *ABCD* et *J* celui du carré *EFGH*. Soit *K* le centre de gravité du triangle *HFC*.
1) Démontrer que *O* est l'isobarycentre des huit sommets du cube.
2) En déduire que le point *O* est le milieu du segment [*IJ*].
3) Démontrer que le point *O* est l'isobarycentre des quatre sommets du tétraèdre *ACFH*.
4) En déduire que les points *A*, *O* et *K* sont alignés puis calculer *AK* en fonction de *a*.
5)) a) Donner les coordonnées de *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G* et *H* dans le repère $(A\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ où ces 3 vecteurs sont unitaires et colinéaires respectivement à $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.
b) En déduire les coordonnées du point *O*.
c) Calculer les coordonnées du point *K* et redémontrer que les points *A*, *O* et *K* sont alignés.



d) Calculer la distance *AK* en fonction de *a*.

Exercice10 : *ABCDEFGH* est un cube, *I* et *J* sont les centres des faces *ABCD* et *BCGF*, *K* est le milieu du segment [*EF*]. On considère La section plane du cube par le plan (*IJK*).
1) En travaillant dans un triangle adéquat, montrer que la droite (*IJ*) est parallèle à la droite (*AF*).
2) a) Montrer que la droite d'intersection du plan (*IJK*) et du plan (*ABF*) est parallèle à (*AF*).
b) En déduire que le milieu *L* de [*AE*] est un point de la section **S** .
3) Tracer ci-dessous la section **S** en couleur (vous laisserez les traits de construction au crayon papier).

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien