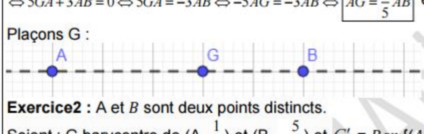
1er BAC Sciences Expérimentales BIOF
1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction série N°1 : BARYCENTRE

Exercice1 : A et B sont deux points distincts.
1) Justifier qu'il existe un point G barycentre de (A, 2) et (B, 3).
2) Exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et placer $G = Bar\{(A, 4) ; (B, 3)\}$

Solution : 1) Puisque : $2+3=5\neq 0$
Comme la somme des coefficients de pondération $2+3=5\neq 0$ est différente de zéro et que A et B sont distincts alors, il existe un point $G = Bar\{(A, 2) ; (B, 3)\}$
2) $G = Bar\{(A, 2) ; (B, 3)\}$ donc : $2\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}=\vec{0}$
$2\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{GA}+3(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB})=\vec{0}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$
$\Leftrightarrow 5\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{AB}=\vec{0}\Leftrightarrow 5\overrightarrow{GA}=-3\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow -5\overrightarrow{AG}=-3\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{AG}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}}$ et $G\in(AB)$

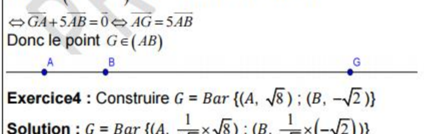
Plaçons G :



Exercice2 : A et B sont deux points distincts.
Soient : G barycentre de (A, $\frac{1}{3}$) et (B, $-\frac{5}{6}$) et $G' = Bar\{(A, 2) ; (B, -5)\}$
Comparer : G et G'

Solution : G barycentre de (A, $\frac{1}{3}$) et (B, $-\frac{5}{6}$) $\Leftrightarrow \frac{1}{3}\overrightarrow{GA}-\frac{5}{6}\overrightarrow{GB}=\vec{0}$
Or, d'après la propriété d'homogénéité, le barycentre reste inchangé si on multiplie ses coefficients par un même réel non nul
Donc, en multipliant par 6, on obtient : $6\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{GA}-\frac{5}{6}\overrightarrow{GB}\right)=6\times\vec{0}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{GA}-5\overrightarrow{GA}=\vec{0}$
Par suite, G est aussi le barycentre de : $\{(A, 2) ; (B, -5)\}$
Or, par hypothèse, G' est le barycentre de : $\{(A, 2) ; (B, -5)\}$
Par conséquent : $G=G'$

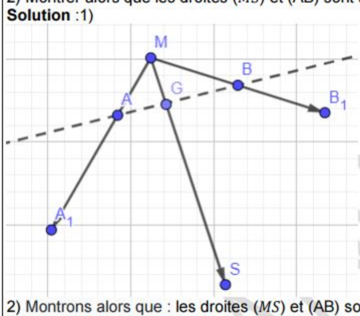
Exercice3 : Construire $G = Bar\{(A, 4) ; (B, -5)\}$
Solution : $G = Bar\{(A, 4) ; (B, -5)\}$ donc : $4\overrightarrow{AG}-5\overrightarrow{BG}=\vec{0}$
$4\overrightarrow{AG}+5(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB})=\vec{0}\Leftrightarrow -4\overrightarrow{GA}+5\overrightarrow{GA}+5\overrightarrow{AB}=\vec{0}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+5\overrightarrow{AB}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=5\overrightarrow{AB}$
Donc le point $G\in(AB)$



Exercice4 : Construire $G = Bar\{(A, \sqrt{8}) ; (B, -\sqrt{2})\}$
Solution : $G = Bar\{(A, \frac{1}{\sqrt{2}}\times\sqrt{8}) ; (B, \frac{1}{\sqrt{2}}\times(-\sqrt{2}))\}$
Donc : $G = Bar\{(A, 2) ; (B, -1)\}$
Donc : $2\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{BG}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AG}-(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AG})=\vec{0}$
Donc : $G=B$

Exercice5 : Sur une droite, on donne trois points A, B et G tels que : $\overrightarrow{GA}=-\frac{2}{5}\overrightarrow{GB}$
Trouver des réels a et b tels que G soit le barycentre du système {(A, a) ; (B ; b)}
Solution : Trouvons des réels a et b tels que G soit le barycentre du système {(A, a) ; (B ; b)}
En effet, G doit vérifier : $a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}=\vec{0}$
On a : $\overrightarrow{GA}=-\frac{2}{5}\overrightarrow{GB}\Leftrightarrow 5\overrightarrow{GA}=-2\overrightarrow{GB}\Leftrightarrow 5\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}=\vec{0}$
Par suite, la relation $5\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ prouve que G est barycentre du système {(A, 5); (B; 2)}
D'où : a =5 et b=2

Exercice6 : Soient A et B deux points distincts et G le barycentre de (A, 3) et (B, 2).
Soit M un point n'appartenant pas à (AB)
1) Construire les points A_1, B_1 et S tels que : $\overrightarrow{MA_1}=3\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB_1}=2\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MS}=\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MB_1}$
2) Montrer alors que les droites (MS) et (AB) sont sécantes en G.
Solution :1)



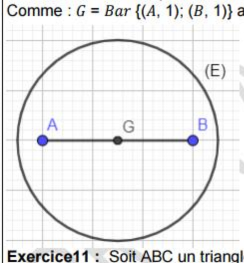
2) Montrons alors que : les droites (MS) et (AB) sont sécantes en G
On a : G le barycentre de : (A, 3) et (B, 2).
Donc : $3\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}=\vec{0}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GA}=-2\overrightarrow{GB}\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{GB}$
Donc : A, B et G sont alignés. D'où, G∈(AB)
On a : $\overrightarrow{MS}=\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MB_1}$ Or : $\overrightarrow{MA_1}=3\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB_1}=2\overrightarrow{MB}$
Donc : $\overrightarrow{MS}=3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}$ et comme G le barycentre de : (A, 3) et (B, 2).
D'après la propriété caractéristique du barycentre on a : $3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=(2+3)\overrightarrow{MG}$
Donc : $\overrightarrow{MS}=5\overrightarrow{MG}$
Donc : M, S et G sont alignés. D'où, G∈(MS)
Ce qui prouve que les droites (MS) et (AB) sont sécantes en G.

Exercice7 : Dans le plan (P) rapporté à un repère $R(O;\vec{i};\vec{j})$ soient $A(3;2)$ et $B(4;1)$ et soit $G = Bar\{(A, 1); (B, -5)\}$
Déterminer les coordonnées de G.
Solution : On a : $\begin{cases} x_G=\frac{-x_A+5x_B}{4} \\ y_G=\frac{-y_A+5y_B}{4}\end{cases}$ donc $\begin{cases} x_G=\frac{17}{4} \\ y_G=\frac{3}{4}\end{cases}$
Donc : $G\left(\frac{17}{4};\frac{3}{4}\right)$

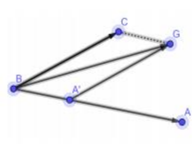
Exercice8 : Soit ABC un triangle et soit : $I = Bar\{(B, 4); (C, -3)\}$
Déterminer les coordonnées du point I dans le repère $R(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$
Solution : On a : $I = Bar\{(B, 4); (C, -3)\}$ donc $(4+(-3))\overrightarrow{AI}=4\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$
Donc : $\overrightarrow{AI}=4\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$
Donc : dans le repère $R(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ $I(4;-3)$

Exercice9 : E et F deux points du plan tels que : $\overrightarrow{EG}=2\overrightarrow{EF}$; $E\notin(AB)$ et G est le barycentre des points $(A;2)$ et $(B;-3)$
1) Montrer que G est le barycentre des points $(E;-1)$ et $(F;2)$
2) En déduire que les droites (EF) et (AB) se coupent et déterminer le point d'intersection
Solution : $\overrightarrow{EG}=2\overrightarrow{EF}\Leftrightarrow \overrightarrow{EG}=2(\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{GF})\Leftrightarrow \overrightarrow{EG}=2\overrightarrow{EG}+2\overrightarrow{GF}\Leftrightarrow -1\overrightarrow{EG}-2\overrightarrow{GF}=\vec{0}$
$-\overrightarrow{GE}+2\overrightarrow{GF}=\vec{0}$ Donc G est le barycentre des points $(E;-1)$ et $(F;2)$
2) On a G le barycentre des points $(E;-1)$ et $(F;2)$ donc $G\in(EF)$ et on a G est le barycentre des points $(A;2)$ et $(B;-3)$ donc $G\in(AB)$
Donc les droites (EF) et (AB) se coupent en G

Exercice10 : Soient A et B deux points tel que : $AB=3cm$
Déterminer et construire l'ensemble suivant : $(E)=\left\{M\in(P)/\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|=4\right\}$
Solution : Soit $G = Bar\{(A, 1); (B, 1)\}$
D'après la propriété caractéristique du barycentre on a :
$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|=4\Leftrightarrow\left\|(1+1)\overrightarrow{MG}\right\|=4\Leftrightarrow 2\left\|\overrightarrow{MG}\right\|=4\Leftrightarrow MG=2$
Donc l'ensemble des points est le cercle de centre G et de rayon : $r=2cm$
Comme : $G = Bar\{(A, 1); (B, 1)\}$ alors aussi : G est le milieu du segment $[AB]$

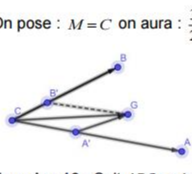


Exercice11 : Soit ABC un triangle :
1)Construire $G = Bar\{(A, 1) ; (B, -1) ; (C, 3)\}$
2)Construire $G = Bar\{(A, 4) ; (B, 1/2) ; (C, -3)\}$
Solution : 1) $G = Bar\{(A, 1) ; (B, -1) ; (C, 3)\}$
Donc : d'après la propriété caractéristique du barycentre on a :
$(1+(-1)+3)\overrightarrow{MG}=1\overrightarrow{MA}+(-1)\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}$
On pose : $M=B$ on aura : $3\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\overrightarrow{BG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$

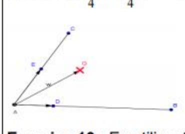


2) $G = Bar\{(A, 4); (B, 1/2) ; (C, -3)\}$
Donc d'après la propriété caractéristique du barycentre on a :
$(4+1/2-3)\overrightarrow{MG}=4\overrightarrow{MA}+1/2\,\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}$

On pose : $M=C$ on aura : $\frac{3}{2}\overrightarrow{CG}=4\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\Leftrightarrow\overrightarrow{CG}=\frac{8}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$

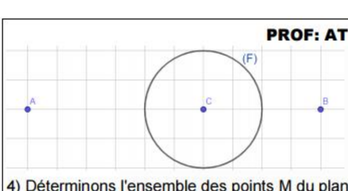


Exercice 12 : Soit ABC un triangle et G point tel que : $2\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{GB}$
1)Montrer que G le barycentre de : $\{(A, 1); (B, 1); (C, 2)\}$ et construire le point G
Solution : $2\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{GB}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$
$\Leftrightarrow 2(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GC})-3\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}\Leftrightarrow -\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Leftrightarrow -\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}=\vec{0}$
Donc G le barycentre de : $\{(A, 1); (B, 1); (C, 2)\}$
On a :® $\overrightarrow{AG}=\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$
Donc : $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{4}\overrightarrow{AC}$ donc : $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

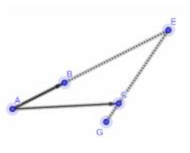


Exercice 13 : En utilisant La propriété d'associativité Construire le barycentre G du système pondéré $\{(A, 2); (B, -3); (C, 5)\}$.
Solution : soit E = $Bar\{(A, 2); (B, -3)\}$
D'après la propriété caractéristique du barycentre on a : $-\overrightarrow{ME}=2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}$
On pose : $M=A$ on aura : $-\overrightarrow{AE}=-3\overrightarrow{AB}$
Donc : $\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{AB}$
D'après la Propriété d'associativité on a : G = Bar\{(E, -1); (C, 5)\}
D'après la propriété caractéristique du barycentre on a : $4\overrightarrow{MG}=-\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MC}$
On pose : $M=E$ on aura : $4\overrightarrow{EG}=5\overrightarrow{EC}\Leftrightarrow\overrightarrow{EG}=\frac{5}{4}\overrightarrow{EC}$

Exercice14 : Soient deux points A et B tels que : $AB=10$
1) Construire C, barycentre du système (A ; 2), (B ; 3)
2) Construire D, barycentre du système (A ; 3), (B ; 2)
3) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $\left\|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right\|=10$
4) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $\left\|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\|$
5) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $MA^2+3MB^2=100$
Solution : 1) C : barycentre du système (A ; 2), (B ; 3) donc : $\overrightarrow{AC}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$ Voir figure
2) D, barycentre du système (A ; 3), (B ; 2) donc : $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ Voir figure
3) Déterminons l'ensemble des points M du plan tels que : $\left\|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right\|=10$
D'après la propriété caractéristique du barycentre on a :
$\left\|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right\|=10\Leftrightarrow\left\|(2+3)\overrightarrow{MC}\right\|=10\Leftrightarrow 5\left\|\overrightarrow{MC}\right\|=10\Leftrightarrow MC=2$
Donc l'ensemble des points est le cercle de centre C et de rayon : $r=2$

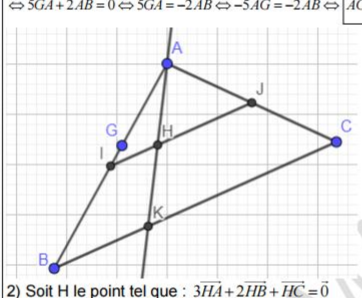


4) Déterminons l'ensemble des points M du plan tels que : $\left\|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\|$
Puisque :C, barycentre du système (A ; 2), (B ; 3)
2) D, barycentre du système (A ; 3), (B ; 2)
D'après la propriété caractéristique du barycentre on a :
$\left\|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\|\Leftrightarrow\left\|(2+3)\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|(2+3)\overrightarrow{MD}\right\|\Leftrightarrow 5\left\|\overrightarrow{MC}\right\|=5\left\|\overrightarrow{MD}\right\|\Leftrightarrow MC=MD$
Donc l'ensemble des points est la droite médiatrice du segment $[CD]$
5) Déterminons l'ensemble des points M du plan tels que : $MA^2+3MB^2=k$
Soit $G = Bar\{(A, 1); (B, 3)\}$ donc : $\overrightarrow{AG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}\Rightarrow AG=\frac{3}{4}AB\Rightarrow AG=\frac{3}{4}\times 10=\frac{15}{2}=7.5$
Et $BG=\frac{1}{4}\times 10=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}=2.5.$
$\overrightarrow{MA}^2+3\overrightarrow{MB}^2=100\Leftrightarrow(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})^2+3(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB})^2=100$
$\Leftrightarrow(\overrightarrow{MG})^2+2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA}+(\overrightarrow{GA})^2+3\left((\overrightarrow{MG})^2+2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB}+(\overrightarrow{GB})^2\right)=100$
$\Leftrightarrow MG^2+2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA}+GA^2+3MG^2+6\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB}+3GB^2=100$
$\Leftrightarrow 4MG^2+2\overrightarrow{MG}.(\overrightarrow{GA}+3.\overrightarrow{GB})+GA^2+3GB^2=100$
$\Leftrightarrow 4MG^2+2\overrightarrow{MG}.(\overrightarrow{GA}+3.\overrightarrow{GB})+GA^2+3GB^2=100$ or : $\overrightarrow{GA}+3.\overrightarrow{GB}=\vec{0}$
$\Leftrightarrow 4MG^2+GA^2+3GB^2=100$
$\Leftrightarrow 4MG^2+\left(\frac{15}{2}\right)^2+3\left(\frac{5}{2}\right)^2=100$
$\Leftrightarrow 4MG^2+75=100\Leftrightarrow 4MG^2=25$
$\Leftrightarrow MG^2=\frac{25}{4}\Leftrightarrow MG=\frac{5}{2}$
Donc l'ensemble des points est le cercle de centre G et de rayon :
$r=\frac{5}{2}$



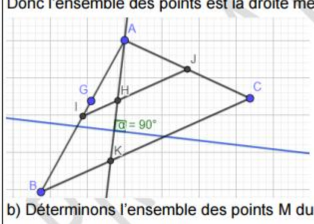
Exercice15 : Soit ABC un triangle tel que : $AB=5$; $AC=4$ et $BC=6$
On désigne par : I le milieu du segment $[AB]$ et J le milieu du segment $[AC]$
1) Construire G barycentre des points pondérés : (A ; 3) et (B ; 2)
2) Soit H le point tel que : $3\overrightarrow{HA}+2\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\vec{0}$
a) Montrer que : les points H ; C et G sont alignés
b) Montrer que : les points H ; I et J sont alignés
c) En déduire une construction du point H
3) La droite (AH) coupe la droite (BC) en K
Montrer que : K est le barycentre des points pondérés : (A ; 1) et (H ; -2)
4) Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan dans les cas suivants :

a) $\left\|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=6\left\|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MH}\right\|$
b) $\left\|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\|=2\left\|\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{MJ}\right\|$
c) $\left\|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\|=10$
d) $3MA^2+2MB^2=50$
Solution : 1) G barycentre des points pondérés : (A ; 3) et (B ; 2)
Donc : $3\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}=\vec{0}$
$3\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}=\vec{0}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GA}+2(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB})=\vec{0}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$
$\Leftrightarrow 5\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{AB}=\vec{0}\Leftrightarrow 5\overrightarrow{GA}=-2\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow -5\overrightarrow{AG}=-2\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\boxed{\overrightarrow{AG}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}}$ et $G\in(AB)$ Voir figure



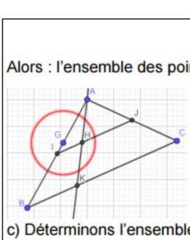
2) Soit H le point tel que : $3\overrightarrow{HA}+2\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\vec{0}$
Donc : H le barycentre de : $\{(A, 3) ; (B, 2) ; (C, 1)\}$
a) Montrons que : les points H ; C et G sont alignés
Il suffit de trouver une relation barycentrique entre : H ; C et G ??????
On a : H le barycentre de : $\{(A, 3) ; (B, 2) ; (C, 1)\}$
Puisque on a : G barycentre des points pondérés : (A ; 3) et (B ; 2)
D'après la Propriété d'associativité on a : H le barycentre de : {(G ;2+3) ; $(C, 1)$}
C'est à dire on a : H le barycentre de : {(G ;5) ; $(C, 1)$}
Donc : les points H ; C et G sont alignés
En effet : H le barycentre de : {(G ;5) ; $(C, 1)$}
Donc : $5\overrightarrow{HG}+1\overrightarrow{HC}=\vec{0}$
Donc : $\boxed{\overrightarrow{HC}=-5\overrightarrow{HG}}$ et $H\in(CG)$
b) Montrons que : les points H ; I et J sont alignés
Il suffit de trouver une relation barycentrique entre : H ; I et J ??????
Analysons notre problème :
I le milieu du segment $[AB]$ donc : I est le barycentre des points pondérés : (A ; 1) et (B ; 1)
J le milieu du segment $[AC]$ donc : J est le barycentre des points pondérés : (A ; 1) et (C ; 1)
Et on a : H le barycentre de : $\{(A, 3) ; (B, 2) ; (C, 1)\}$
Donc : H le barycentre de : $\{(A, 2) ; (A, 1) ; (B, 2) ; (C, 1)\}$
Donc : H le barycentre de : $\{(A, 2) ; (B, 2) ; (A, 1)) ; (C, 1)\}$
Donc : H le barycentre de : {(I, 4) ; (J, 2))} : d'après la Propriété d'associativité
En effet : on a : H le barycentre de : $\{(A, 3) ; (B, 2) ; (C, 1)\}$
Donc : $3\overrightarrow{HA}+2\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\vec{0}$
Donc : $2\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HA}+2\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\vec{0}$
Donc : $2\overrightarrow{HA}+2\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HC}=\vec{0}$ avec Charles on aura :

Donc : $2\overrightarrow{HI}+2\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{HI}+2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{HJ}+\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{HJ}+\overrightarrow{JC}=\vec{0}$
Donc : $4\overrightarrow{HI}+2\overrightarrow{HJ}+2(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB})+(\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JC})=\vec{0}$ et comme : I est le barycentre : (A ; 1) et (B ; 1)
et J est le barycentre: (A ; 1) et (C ; 1)
Alors : $4\overrightarrow{HI}+2\overrightarrow{HJ}=\vec{0}$ c'est-à-dire : H le barycentre de : {(I, 4) ; (J, 2))}
Par suite : les points H ; I et J sont alignés
c) Déduisons une construction du point H :
On a : H le barycentre de : {(I, 4) ; (J, 2))} donc : H est le barycentre de : {(I, 2) ; (J, 1))} aussi
Donc : $2\overrightarrow{HI}+1\overrightarrow{HJ}=\vec{0}$
Donc : $\overrightarrow{IH}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IJ}$ Voir figure
3) La droite (AH) coupe la droite (BC) en K
Montrons que : K est le barycentre des points pondérés : (A ; 1) et (H ; -2)
Dans le triangle ABC on a : I le milieu du segment $[AB]$ et J le milieu du segment $[AC]$
Donc : La droite (IJ) est parallèle à la droite (BC)
Dans le triangle ABK on a : I le milieu du segment $[AB]$ et La droite (IH) est parallèle à la droite (BK)
Donc : H est aussi le milieu du segment $[AK]$
Donc : $\overrightarrow{KA}=2\overrightarrow{KH}$
Donc : $1\overrightarrow{KA}-2\overrightarrow{KH}=\vec{0}$
Par suite : K est le barycentre des points pondérés : (A ; 1) et (H ; -2)
4) a) Déterminons l'ensemble des points M du plan tel que : $\left\|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=6\left\|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MH}\right\|$
On a : H le barycentre de : $\{(A, 3) ; (B, 2) ; (C, 1)\}$
et K est le barycentre des points pondérés : (A ; 1) et (H ; -2)
D'après la propriété caractéristique du barycentre on a :
$\left\|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=6\left\|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MH}\right\|$
$\Leftrightarrow\left\|(3+2+1)\overrightarrow{MH}\right\|=6\left\|(1+(-2))\overrightarrow{MK}\right\|\Leftrightarrow|6|\left\|\overrightarrow{MH}\right\|=6\times|-1|\left\|\overrightarrow{MK}\right\|\Leftrightarrow 6MH=6MK\Leftrightarrow MH=MK$
Donc l'ensemble des points est la droite médiatrice du segment $[HK]$

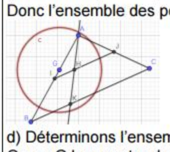


b) Déterminons l'ensemble des points M du plan tel que : $\left\|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\|=2\left\|\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{MJ}\right\|$
On a : G barycentre des points pondérés : (A ; 3) et (B ; 2)
D'après la propriété caractéristique du barycentre on a :
$\left\|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\|=2\left\|\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{MJ}\right\|$
$\Leftrightarrow\left\|(3+2)\overrightarrow{MG}\right\|=2\left\|\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{MJ}\right\|\Leftrightarrow|5|\left\|\overrightarrow{MG}\right\|=2\left\|\overrightarrow{MI}-(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IJ})\right\|\Leftrightarrow 5MG=2\left\|-\overrightarrow{IJ}\right\|\Leftrightarrow 5MG=2IJ\Leftrightarrow MG=\frac{2}{5}IJ$
Donc l'ensemble des points est le cercle de centre G et de rayon : $r=\frac{2}{5}IJ$
Et comme : $IJ=\frac{BC}{2}=\frac{6}{2}=3$

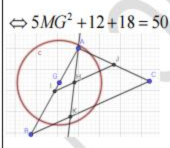
Alors : l'ensemble des points est le cercle de centre G et de rayon : $r=\frac{6}{5}$



c) Déterminons l'ensemble des points M du plan tel que : $\left\|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\|=10$
On a : G barycentre des points pondérés : (A ; 3) et (B ; 2)
D'après la propriété caractéristique du barycentre on a :
$\left\|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\|=10\Leftrightarrow\left\|(3+2)\overrightarrow{MG}\right\|=10\Leftrightarrow|5|\left\|\overrightarrow{MG}\right\|=10\Leftrightarrow 5MG=10\Leftrightarrow MG=2$
Donc l'ensemble des points est le cercle de centre G et de rayon : $r=2$



d) Déterminons l'ensemble des points M du plan tel que : $3MA^2+2MB^2=50$
On a : G barycentre des points pondérés : (A ; 3) et (B ; 2)
$3MA^2+2MB^2=100\Leftrightarrow 3\overrightarrow{MA}^2+2\overrightarrow{MB}^2=50\Leftrightarrow 3(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})^2+2(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB})^2=50$
$\Leftrightarrow 3(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})^2+2(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB})^2=50$
$\Leftrightarrow 3\left((\overrightarrow{MG})^2+2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA}+(\overrightarrow{GA})^2\right)+2\left((\overrightarrow{MG})^2+2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB}+(\overrightarrow{GB})^2\right)=50$
$\Leftrightarrow 3MG^2+6\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA}+3GA^2+2MG^2+4\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB}+2GB^2=50$
$\Leftrightarrow 5MG^2+2\overrightarrow{MG}.(3\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB})+3GA^2+2GB^2=50$ $\Leftrightarrow 5MG^2+2\overrightarrow{MG}.(\vec{0})+3GA^2+2GB^2=50$
$\Leftrightarrow 5MG^2+3GA^2+2GB^2=50$ et on a : $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}\Rightarrow\boxed{AG=\frac{2}{5}AB=\frac{2}{5}\times 5=2}$ et $\boxed{BG=AB-AG=5-2=3}$
$\Leftrightarrow 5MG^2+12+18=50\Leftrightarrow 5MG^2=50-30\Leftrightarrow 5MG^2=20\Leftrightarrow MG^2=4\Leftrightarrow MG=2$



C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien